Anfangsgründe der Goniometrie,

oder

analytischen

Trigonometrie und Polygonometrie,

mit Anwendungen

auf die Land- und Feldmeßkunst.

Von

G. A. Däzel,

öffentlichen Lehrer der Mathematik und Forstwissenschaft
zu München.

Mit zwey Kupfertafeln.

München,
bey Joseph Lindauer.

1800.

Dem

durchlauchtigsten Fürsten und Herrn,

Herrn

Maximilian Joseph,

Pfalzgrafen bey Rhein,

in Ober- und Niederbaiern Herzog,

des heil. röm. Reichs

Erztruchsesse und Kurfürsten,

Herzog zu Jülich, Cleve und Berg, Landgrafen zu Leuchtenberg, Fürsten zu Mörs, Grafen zu Veldenz, Sponheim, der Mark, Ravensberg und Rappoltstein, Herrn zu Ravenstein und Hohenack rc. rc.

meinem gnädigsten Fürsten und Herrn.

Durchlauchtigster Kurfürst,
gnädigster Herr, Herr!

Der Himmel hat uns in Eurer kurfürstl. Durchlaucht einen guten Regenten, einen wahren Vater des Vaterlandes geschenket, der Allen Alles zu werden, und das einzelne Beste seiner Unterthanen mit dem allgemeinen des Staates, nach Möglichkeit, zu verbinden suchet.

Ich glaube, mehr meinem Vaterlande Baiern Glück wünschen zu müssen, daß es seinen sehnlich gewünschten **Maximilian Joseph** erhalten hat, als Eurer kurfürstl. Durchl. zu dem neuen Erbe,

das noch voll der Wunden ist, die ihm der Krieg geschlagen hat.

Darf ich es wagen, Höchstdenselben diese kleine Schrift mit innigster Verehrung, und mit den wärmsten Empfindungen des Herzens zu überreichen? Sie zeuget von meinem Bestreben, Geschmack an der reinen und angewandten Mathematik unter meinen jungen Landsleuten zu verbreiten. Vieljährige Erfahrung hat es mich gelehrt, daß die Mathematik, über dieß, daß sie uns im Civil und Militär recht viele wesent-

sent-

sentliche Vortheile verschaffet, die jungen Leute zu einer ordentlichen, gründlichen Denkart gewöhnet, die sie dann in andere Wissenschaften, und selbst in ihre Amtsgeschäfte übertragen. Sie rächet sich oft empfindlich an dem Geschäftsmanne, der als Jüngling ihre Reitze verschmähte. Glücklich das Land, das viele ordentlich und gründlich denkende Köpfe zählt, die überall nicht sich, sondern die reine Wahrheit suchen.

Möchten doch Eurer kurfürstl. Durchl. meine Bemühungen nicht unangenehm, und Höchst Ihrer Unterstützung würdig seyn.

Ich bin in tiefester Unterthänigkeit

Eurer kurfürstl. Durchl.

Unterthänig = gehorsamster

G. A. Däzel.

Vorrede.

Diese Schrift darf am wenigsten ohne Vorrede erscheinen. Den meisten Lesern muß eine kurze Geschichte der Goniometrie — so nenne ich die Wissenschaft, welche Trigonometrie und Polygonometrie in sich begreift — sehr willkommen seyn; alle können über den besondern Umstand, daß meine Schrift mit eines andern seiner von ähnlichem Inhalte, zu gleicher Zeit, und in dem nämlichen Orte erscheint, mit Recht einen Aufschluß fordern, und ein Paar moralische Worte dem jungen Leser an das Herz gelegt, können, in unsern Zeiten, auch nicht schaden. Ich werde mich befleißen, meinen Lesern, so viel in mir ist, Genügen zu leisten.

Der berühmte Lambert hat den Saamen, woraus diese neue Wissenschaft gekeimet, schon in seiner Anlage zur Tetragonometrie *) ausgestreut. Obschon er diese nicht selbst bearbeitete, zählte er doch alle mögliche dahin gehörige Fälle auf, und bestimmte damit die Zahl der Aufgaben, de-

*) Lamberts Beyträge zum Gebrauche der Mathematik. II. Theil. I. Abschnitt. Berlin 1770.

deren Auflösung, in so fern die Berechnung vier-eckiger Figuren sich zum Theil nicht eben so leicht, zum Theil gar nicht durch Trigonometrie bewirken läßt, gewiß größern Nutzen verspricht, als die bloße Uebung der Anfänger in der trigonometrischen Analysis seyn möchte, und auch, seit wir sie besitzen, wirklich gewähret hat.

Herr Tobias Mayer, jetzt Hofrath und Professor der Mathematik und Physik zu Erlangen, war der erste, der sich an dieses Lambert-sche Pensum wagte. Er übergab uns seine Arbeit in der schon sehr selten gewordenen Schrift *), welche er, als ihm die Universität Göttingen im Jahre 1773 die Magisterwürde ertheilte, derselben feyerlich vorgelegt hat. — Doch er war schon zufrieden, das große tetragonometrische Problem für den Fall allein, wo nur die Seiten und Winkel des Vieleckes in Betrachtung kommen, gelöset zu haben, und überließ die Lösung des Problems für den zweyten, wo die Zerlegung des Viereckes durch Diagonalen mit in Betrachtung kömmt, dem Herrn Stephan Biörnsen.

Hr. B. bearbeitete recht nach dem Sinne des indessen verstorbenen Lamberts die ganze Tetrago-

gono-

*) Tetragonometriae Specimen I.... Joh. Tob. Mayer. Gött. 1773.

gonometrie. Seine äußerst mühesam abgefaßte Schrift *) beweiset zur Genüge, daß er bey mehr Unterstützung seinem Vaterlande recht viel Ehre in den mathematischen Wissenschaften hätte machen können.

Jetzt faßte Herr Lexell den nämlichen Gedanke an; doch er brach sich eine eigene Bahn, die ihn weiter führte, als selbst Lambert mochte gesehen haben. Er fand zwey Gleichungen, aus welchen er, wie aus einem Knaul Faden, die ganze Tetragonometrie, und überhaupt die Polygonometrie sehr geschickt zu entwickeln wußte. Der Witz und Scharfsinn dieses Mannes verdient unsere ganze Bewunderung, wie seine beyden in die Petersburger Commentarien eingerückten Abhandlungen **) die Aufmerksamkeit der Mathematiker längst verdient hätten. Ihm haben wir in dieser Erfindung einen wichtigen Zusatz zur reinen Mathematik zu verdanken, einen Zusatz, der beynahe zur Trigonometrie, wie die höhere Analysis zur niedern, sich verhält. Es ist diese Wissenschaft auch so reich an Stoff, daß man damit leicht mehrere Folianten anfüllen könnte; schon

*) Introductio in Tetragonometriam, ad mentem viri clarissimi *Lambert* analytice conscripta. Hafniae 1780.

**) De resolutione polygonorum rectilineorum. Commentarii novi Petrop. T. 19. 20.

schon die Tetragonometrie allein, wie sie Herr Biörnsen in gedrängter lateinischer Sprache abgefaßt hat, macht einen ziemlich starken Band aus: um wie viel mehr würde eine ähnliche Bearbeitung des Fünfeckes, Sechseckes u. s. w. betragen? denn die Zahl der möglichen Fälle nimmt in einem vielmal größern Verhältniße zu, als die Seitenzahl des Vieleckes.

Aber bey dieser für den Geist des Theoretikers so reich besetzten Tafel darf auch der Praktiker nicht hungern. Ist eben nicht alles brauchbar für ihn, was die Polygonometrie anbietet, ist es doch vieles. Und wäre auch vielmal weniger, als wirklich ist, in der Land- und Feldmeßkunst anwendbar, so wäre schon dieses Wenige von der Art, daß dessen Mangel sich durch keine Trigonometrie ersetzen ließ. Allerdings können mit Hilfe der Polygonometrie Aufgaben gelöset werden, welche außerdem keiner Auflösung fähig wären; und wo man auch mit der Trigonometrie zur Noth ausreicht, empfiehlt sich doch jene durch die mehrere Allgemeinheit ihrer Formeln, deren Gebrauch schon darum weniger ermüdet, weil die Arbeit gleichförmiger, und indem weniger dabey gedacht werden darf, auch weniger irrsam ist. Die Länge der polygonometrischen Formeln darf den Rechner eben nicht

schre-

schrecken; denn sie, und das leicht bemerkbare Gesetz des Fortganges der Glieder, erschweren nicht, erleichtern vielmehr seine Mühe. Allemal werden da, wo sich die Trigonometrie auch brauchen läßt, fünf, sechs, und mehrere trigonometrische Formeln erfordert, indeß eine einzige polygonometrische zureichet; und jene haben alle zusammen nicht weniger Glieder, sind nicht leichter zu bearbeiten, als diese einzige, vielmehr härter um das, als die Gedankenruhe, welche das Mechanische der Analysis begleitet, durch die, bey jedem Uebergange von einer Formel zur andern erforderliche Anstrengung des Geistes öfters unterbrochen wird, und von kürzerer Dauer ist. So viele trigonometrische Formeln zur Auflösung einer Aufgabe erforderlich sind, so vielmal muß man auch die Anwendung auf die neue Frage einrichten, und so vielmal kann man auch wechselweise der Mühe zu denken sich auf kurze Zeit überheben. Die längere und ununterbrochene Zeit, die man bey weniger Anstrengung des Verstandes mit Zifferrechnung zubringt, ist es also, was die Polygonometrie besonders werth macht.

Nun glaube ich, dem Leser auch sagen zu müssen, woher es komme, daß mein sehr guter Freund, Herr Markscheider Neumann und ich zu gleicher Zeit über Anwendung der Polygono-

metrie

metrie zu schreiben uns entschlossen haben. Der Fall ist zu sonderbar, als daß er sich nicht sollte Aufschlüsse wünschen. — Gerne, doch in aller möglichen Kürze will ich ihn seines Wunsches gewähren.

Seit mehrern Jahren dachte ich über eine Methode nach, wie Waldungen aus ihrem Umfange trigonometrisch gemessen, mit Zuverläßigkeit gezeichnet und berechnet werden möchten, und war in der Zwischenzeit so glücklich, zu der Guiotschen und Pickelschen einige nicht unbedeutende Zusätze zu machen, unter welchen der vornehmste der war, daß ich ein Mittel fand, eine aus dem Umfange gemessene und nach allen Seiten und Winkeln bekannte vielseitige Figur in eine einfache, leicht zu verzeichnende Grundfigur aufzulösen. Nun dieses Mittel theilte ich meinem Freunde mündlich mit. Er bezweifelte die Richtigkeit meiner Methode, und dachte selbst nach. Die Erfindung einer ganz allgemeinen, zur Auflösung dieser Aufgabe dienenden Formel lohnte gar bald seine Mühe. Ich freute mich über diese Bereicherung der Feldmeßkunst. Obschon auch ich die Ausführbarkeit einer so ganz analytischen Methode bezweifelte, wollte ich doch meinem gelehrten Freunde lieber auf sein Wort glauben, als über eine Sache aburtheilen, von der ich

noch

noch keine andere als historische Kenntniß hatte. Indessen bat ich ihn, seine nützliche Erfindung zu jedermanns Wissenschaft nur bald durch den Druck bekannt zu machen. — Er that es nicht, sondern, vermuthlich weil er die Fruchtbarkeit seiner Grundgleichungen schon frühe hatte kennen gelernt, suchte nur noch tiefer in die Polygonometrie einzudringen. Was er nun von Zeit zu Zeit erfand, ließ er mich allemal, obschon nur historisch, wissen, nämlich nur die Aufgaben, nicht auch deren Auflösungen. Doch hoffte ich auch diese durch die baldige Herausgabe zu erfahren. Schon lag seine Schrift fast ein Jahr zum Druck fertig; noch zauderte er, sie unter die Presse zu geben. Nun dieses spannte meine Wißbegierde auf das höchste, nöthigte mich selbst Hand anzulegen, und nachdem ich bereits schon so glücklich gewesen war, das Problem von Messung, Zeichnung und Berechnung großer Waldungen *) aufzulösen, auch durch fernere Anwendungen der Polygonometrie meine Kräfte zu prüfen.

Indem ich aber dieß that, war noch keineswegs meine Absicht, das Gefundene durch den Druck bekannt zu machen; weil ich nicht wußte, wie

*) Ueber die zweckmäßigste und zuverläßigste Methode, große Waldungen zu messen, zu zeichnen, und zu berechnen. München 1799.

wie weit meine Kräfte hinreichen würden: allein nachdem die Arbeit so weit glücklich gediehen war, daß ich hoffen durfte, einigen meiner Zuhörer, welche sich zu Feldmessern bilden wollten, durch die Herausgabe einen Dienst zu erweisen, ließ ich mir nichts so sehr angelegen seyn, als wie ich diese kleine Schrift den Kräften meiner jungen Leser gehörig anpassen möchte. Und zu diesem Ende verband ich Polygonometrie mit Trigonometrie, und leitete beyde aus einer gemeinschaftlichen Quelle ab, machte auch von jeder mancherley Anwendungen auf die Land- und Feldmeßkunst, und beleuchtete die mehrsten mit Zahlenbeyspielen. Ich wollte nämlich das Erworbene wieder mittheilen, gemeinnützig und für jedermann genießbar machen; denn ich schreibe wahrlich nicht wegen des eiteln: Digitis monstrari, et dicier, hic est, sondern um meinen Lesern zu nützen, vorzüglich jenen, die meine Zuhörer waren, oder künftig seyn werden. Und darum habe ich mit dieser Schrift, auch ehe sie noch zum Drucke bestimmt war, nicht zurückgehalten, vielmehr einigen meiner Zuhörer sie selbst zum Abschreiben dargeboten. Mich lohnte schon zureichend das erhabene geistiche Vergnügen, was mir bey Verfassung dieser Schrift öfters geworden war, und von der Art ist, daß ich es um das gewöhnliche

Schrift-

Schriftsteller = Interesse keineswegs vertauschen möchte. So mancherley ich in meinem Leben studirt habe, habe ich doch an nichts so großes, eines unsterblichen Geistes würdiges Vergnügen empfunden, als das ist, was uns die Analysis gewähret. Durch sie sind wir im Stande, Kenntnisse, die wir hie und da zu unsern Absichten brauchen, und zu deren Erforschung noch niemand vor uns Veranlassung gehabt hat, wie aus uns selbst zu erfinden: und ist dieses nicht das größte Vergnügen *), dessen wir Sterbliche hienieden fähig sind?

*) Ist es erlaubt, von der Größe des Vergnügens, das dem menschlichen Geiste eine Wissenschaft gewähret, auf deren Erhabenheit zu schließen, so steht die Kunst, eine Blüthe zu analysiren, die auch Reitze für Kinder hat, und ihrem Alter und Verstande ganz angemessen ist, sicher hinter der mathematischen Analysis, an der nur der Geist des Mannes Geschmack findet, sehr weit zurück. Wir bedürfen aber dieses Beweises nicht; der triftigste Beweisgrund liegt schon in der Natur der Sache selbst. Die mathematische Analysis fordert von dem Manne sehr viel Witz und Verstand, überhaupt einen schöpferischen Geist; was kann die botanische von dem Kinde fordern? — Jener Freund, nicht der Künste und Wissenschaften, sondern einzelner Künstler und Gelehrten, welche zu ihm eine nicht chemische, sondern politische Verwandtschaft haben, muß das Vorzügliche der mathematischen vor der botanischen Analysis gar nicht gekannt haben, als er einem Mathematiker von Profeßion die Fähigkeit eine Baum=

sind? Ich habe es genossen, ohne meinen Freund des seinigen zu berauben. Meine Schrift soll ihm die Ehre der Erfindung nicht streitig machen; soll ihn in dem frohen Bewußtseyn, eine der nützlichsten Wissenschaften über ihre bisherigen Gränzen erweitert zu haben, nicht im mindesten stören: so wie ich hinwieder hoffe, keiner unedlen Handlung von ihm beschuldiget zu werden. Er reitzte meine Wißbegierde, und ich befriedigte sie aus mir selbst, nicht aus seinem Eigenthume, auf Kosten seiner Ehre, die mir so heilig ist, als ihm die meinige seyn muß. Ich gab ihm Anlaß über das

Baumblüthe zu analysiren schlechthin absprach, und damit den Mann bis unter das Kind herunter würdigte. Diese kleinliche Handlung zeuget von einem sehr beschränkten Geiste, der bleyschwer an dem Sinnlichen der bildenden Künste hängt, und das Uebersinnliche der erhabensten unter den natürlichen Wissenschaften noch gar nicht geschmecket hat; sie zeuget von besonders großer Eingenommenheit für das, was man selbst weiß und liebt, und gegen alles, was man nicht selbst weiß und liebt. Es fällt nämlich dem stolzen Kunstliebhaber oder Gelehrten allemal sehr empfindlich, wenn er an einem Manne, der mit ihm in keiner nähern Verbindung, als jeder Mensch mit dem andern, steht, gewisse Kenntnisse, die ihm oder seinem Freunde mangeln, anerkennen, und ihm vor diesem den Vorzug einräumen soll: allein dieser unedle Stolz, diese Ehrsucht sollte in der Republik der Gelehrten schon gar nicht geduldet werden; sie ist wahres Unkraut, das der Feind unter den guten Saamen gesäet hat.

das Problem von Vermessung der Waldungen aus dem Umfange nachzudenken, und er mir die von Hrn. Lexell schon erfundene Polygonometrie, so weit sie zu meiner Absicht diente, neu zu bearbeiten, und auf die Land- und Feldmeßkunst anzuwenden. Es gab also einer dem andern, was — si parva licet componere magnis — dem großen unsterblichen Newton der vom Baum fallende Apfel gab — Anlaß. Der sachkündige Leser, dem es angenehm seyn mag, hie und da die nämliche Sache von zweyen bearbeitet zu lesen, soll richten zwischen mir und meinem Freunde.

Ich wiederhole es noch einmal. Ich schreibe weder der Ehre, noch des Geldes wegen, sondern aus der reinsten Absicht, jungen Feldmessern Gelegenheit zum stäten Fortschreiten in der Mathematik zu verschaffen, damit sie nicht auf der betrettenen Bahn zurückbleiben, oder wohl gar dieselbe verlassen, und gewissen After-Mathematikern sich zugesellen mögen, welche, ohne Mathematik zu verstehen, dennoch mit selber Wucher treiben. So mächtige Reitze dieser ihr Beyspiel auf junge Leute hat, welche gierig nach beßerm Auskommen trachten; so sehr muß man sie dagegen zu waffnen suchen. Was kann mehr verführerisch seyn, als sehen, daß Männer, welche kaum die mathematische Sprache ver-

stehen, noch viel weniger sie selbst sprechen können, dennoch Mathematiker, Geometer, Ingenieur, Architekte und Hydrauliker heißen; daß Männer, die nichts weniger sind, als das, was sie heißen, nur durch ihren ansehnlichen Vorrath von Büchern, die sie nicht verstehen, von Instrumenten, die sie nicht zu brauchen wissen, überhaupt durch ihren gelehrten Flitterstaat bey Profanen sich in Ansehen gesetzt haben; daß Männer einem so erbettelten Ansehen ihre ganze politische Existenz, Chargen, Gagen, Besoldungen, Titel, ihr Alles zu verdanken haben. — Es ist wahr, daß viele Menschen mit dem einzigen Talente, Dummdreistigkeit, in der Welt sich fortbringen: allein was kostet es sie Mühe, wie viel Sorgen und Kummer? welche Demüthigungen müssen sie sich gefallen lassen, bis sie zu ihrem Zwecke gelangen: und wenn sie denselben erlangt haben, wenn sie nun sind, was zu seyn sie Ehre und Vermögen opferten, wie viel bleibt nicht ihnen noch zu leiden übrig, daß sie den mühsam errungenen Platz auch behaupten mögen? — Wie peiniget sie nicht das Bewußtseyn, wenn sie noch nicht alle Schamhaftigkeit ausgezogen haben, daß sie ihrem gelehrten Amte nicht gewachsen sind; daß sie sich andern von minderm Range vertrauen müßen? Wie ziehen sie sich in ihren Hinter-

halt

halt zurück, wenn sie mit einem Eingeweihten zu thun haben? Zu welchen niedrigen Kunstgriffen müssen sie dann ihre Zuflucht nehmen, daß nicht ihr blaßes Faulholzlicht durch den Glanz und Schimmer wahrer Gelehrsamkeit verdunkelt werde? Sie erlauben sich die schwärzesten Verläumdungen als Mittel, geschickte Männer, die ihrem angemaßten Stolze Abbruch thun dürften, von sich zu entfernen; sie stellen Leute an, die entweder eben so unwissend, wie sie selbst, oder doch auf ihren Verstand Verzicht zu thun, allerwenigst ihr weniges Wissen ihnen als Darlehen unverzinslich zu überlassen bereitet sind. — Die elenden Krücken! auf denen diese Herren einhergehen!

Ist dieß nicht Beweggrund genug für Jünglinge oder junge Männer, welche reine oder angewandte Mathematik zu ihrem Metier brauchen, sich darin gründlich, nicht oberflächlich, einzustudiren? — Nur gründliches Studium wird sie aus mancher Verlegenheit ziehen, gegen manche Demüthigung schützen; nur dieses gewähret uns das tröstliche Bewußtseyn, unsern Posten mit Ehren, und zum Wohl des Staates behauptet zu haben. Dieses, das Wohl des Staates, nicht Befriedigung unserer Begierden, und Erhöhung des sinnlichen Genußes, soll uns antreiben, Aemter und Bedienstungen zu suchen. So lange unsere

sere jungen Leute, sagt ein wahrhaft großer Mann, dem Staate kein Opfer zu machen bereitet sind, die wahre Weisheit verschmähen, nur Rang, gute Besoldung und ein Weib zum Ziele ihres rastlosen Strebens setzen, wird es nimmer beßer gehen. Werden meine jungen Leser mit den mathematischen Wissenschaften auch wahre Weisheit zu verbinden suchen, so hat sich der Staat in ihnen sicher rechtschaffene Diener zu versprechen. Gelehrte Männer können dem Staate nützen; aber nur Männer, die gelehrt und weise sind, nützen ihm wirklich. Der Gelehrte suchet nur sein einzelnes Beste, der Weise auch das des Staates; jener will alle seine Begierden befriedigen, dieser, wo es das allgemeine Beste fordert, weiß sie auch zu beschränken. Ich schließe mit Kästner, dem großen Dichter, und noch größern Mathematiker:

Pracht, Reichthum, eitle Lust kann sie uns nicht gewähren:
Was giebt die Weisheit uns? den Geist, das zu entbehren.

Den 5. Hornung 1799.

Der Verfasser.

Goniometrie.

Erklärungen und Begriffe von den goniometrischen Linien.

§. 1.

Jede geradlinige Figur zählt so viele Seiten, als Winkel, und besteht daher aus zweymal so vielen Stücken, als sie Seiten hat.

§. 2.

Sind von 2n Stücken einer n seitigen Figur alle, drey ausgenommen, bekannt, so können diese aus jenen bestimmt werden, planimetrisch, oder goniometrisch. Die Goniometrie lehret also aus so viel Seiten und Winkeln, als zur Bestimmung einer geradlinigen Figur erfodert werden, wenn sie in Zahlen gegeben sind, die übrigen durch Rechnung zu finden.

§. 3.

Es zerfällt diese Wissenschaft in zwey Haupttheile: die Trygonometrie, welche nur Dreyecke, und die Polygonometrie, welche alle mehrseitige Figuren zu ihrem Gegenstande hat.

§. 4.

Die Winkel und Seiten einer Figur sind zwar ungleichartige Größen, und können daher, als solche, nicht miteinander verglichen werden: allein, indem man die Größen der Winkel durch Verhältnisse gerader Linien, welche sie bestimmen, ausdrückt, werden die Winkel auf gewisse Weise mit den Seiten gleichartig, und folglich der Vergleichung mit eben denselben fähig gemacht.

§. 5.

Man wählte zu Linien, deren Verhältnisse die Größen der Winkel bestimmen sollen, sehr weislich die Seiten eines rechtwinkligen Dreyeckes. Denn in dem bey B rechtwinkligen Dreyecke ABC (Fig. 1.) wird der Winkel A aus den Verhältnissen AC : AB; AB : BC; AC : BC, und hinwieder diese aus jenem bestimmt.

§. 6.

Nennt man daher, mit den Erfindern dieser Wissenschaft, BC : AC oder $\frac{BC}{AC}$ den Sinus des Winkels A; $\frac{AB}{AC}$ den Cosinus desselben, oder den Sinus seines Complementswinkels C; $\frac{BC}{AB}$ die Tangente des Winkels A, und $\frac{AB}{BC}$ die Cotangente dieses Winkels, oder die Tangente des Complementswinkels C, und bezeichnet den Sinus eines Winkels mit sin., den Cosinus mit cos., die Tangente mit tang., und die Cotangente mit cot., so ergeben sich folgende Grundformeln:

sin. A.

$$\sin. A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos. A = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tang. } A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin. A}{\cos. A} = \frac{1}{\cot. A}$$

$$\cot. A = \frac{AB}{BC} = \frac{\cos. A}{\sin. A} = \frac{1}{\text{tang. } A}$$

$$\sin. A^2 + \cos. A^2 = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

§. 7.

Nimmt man die Hypothenuse AC zur Einheit an, so drückt BC den Sinus des Winkels A, und AB den Cosinus desselben aus. Auf gleiche Weise stellt BC die Tangente des Winkels A, oder die Cotangente des Complementswinkels C vor, wenn man AB für die Einheit gelten läßt. In so fern nun nach dieser Voraussetzung die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten sich durch gerade Linien vorstellig machen lassen, kann man sie alle gemeinschaftlich goniometrische Linien nennen. — Ich sage hier geflissentlich nichts von noch andern Linien dieser Art, weil ich in der Folge keine Gelegenheit habe, auch ihren praktischen Nutzen zu zeigen.

§. 8.

Diese Linien leiden nach Verschiedenheit der Winkel, welche sie bestimmen, gar mannigfaltige Veränderungen, nicht nur in Ansehung ihrer Größe, sondern auch ihrer

Lage. Man muß sich mit selben sehr genau bekannt gemacht haben, wenn man die nachfolgenden Lehren deutlich verstehen, und Irrungen vermeiden will.

§. 9.

Man beschreibe (Fig. 2.) mit dem Halbmesser AE = 1 den Kreis AGBA, und lasse aus dem Punkte E auf den Durchmesser AB das Perpendikel ED fallen, so ist dieses der Sinus, und DC der Cosinus des Winkels ACE, oder des zugehörigen Bogens AE. Man errichte ferner aus C das Perpendikel CG, und fälle auf selbes, gleichfalls aus E, ein zweytes Perpendikel EH, so ist EH = CD der Sinus, und CH der Cosinus des Winkels ECG, welcher den ACE zu einem rechten ergänzet. Endlich ziehe man durch die Endpunkte der auf einander senkrechten Halbmesser AC und GC die Berührungslinien des Kreises, und verlängere den Schenkel CE, bis er diese Berührungslinien in K und I schneidet, so ist AI die Tangente, und GK die Cotangente des Winkels ACE, und letztere zugleich auch die Tangente des Complementswinkels ECG.

§. 10.

Ist nun der Winkel ACE = o, oder die Linie CE fällt mit CA zusammen, so wird der Sinus und die Tangente = o, die Cotangente = ∞, und der Cosinus = 1. Mit dem Winkel wächst der Sinus und die Tangente, der Cosinus aber und die Cotangente nehmen ab, bis derselbe ein rechter geworden. Wie er nun dieses ist, wird der Cosinus und die Cotangente = o, die Tangente = ∞, und der Sinus = 1, welcher dann der ganze

Si=

Sinus heißt. Der Winkel fahre fort zu wachsen, und werde immer mehr und mehr stumpf, so nimmt jetzt der Sinus und die Tangente ab, der Cosinus aber und die Cotangente zu, und es ist Fd der Sinus, Cd der Cosinus, Ai die Tangente, und GK die Cotangente des Winkels ACF. Der Sinus hat noch allein dieselbe Lage gegen den Durchmesser AB, welche er hatte, als der Winkel spitzig war; die übrigen Linien alle haben die entgegengesetzte angenommen. Endlich, wenn der Winkel $= 2\,R$ ist, ist der Sinus und die Tangente wieder $= 0$, die Cotangente $= \infty$, und der Cosinus $= 1$. Setzt man diese Betrachtungen noch weiter fort, bis der Winkel $= 4\,R$ ist, und nimmt an, daß die goniometrischen Linien in der Lage, welche sie bey dem spitzigen Winkel haben, positiv, in der entgegengesetzten aber negativ seyen, so läßt sich behaupten, was folgende Tabelle zur leichtern Uebersicht kurz darstellet.

§. 11.

Es bedeute α einen spitzigen Winkel, so ist

$$\sin.\ (2R - \alpha) = + \sin.\ \alpha$$
$$\cos.\ (2R - \alpha) = - \cos.\ \alpha$$
$$\text{tang.}\ (2R - \alpha) = - \text{tang.}\ \alpha$$
$$\cot.\ (2R - \alpha) = - \cot.\ \alpha$$

$$\sin.\ (2R + \alpha) = - \sin.\ \alpha$$
$$\cos.\ (2R + \alpha) = - \cos.\ \alpha$$
$$\text{tang.}\ (2R + \alpha) = + \text{tang.}\ \alpha$$
$$\cot.\ (2R + \alpha) = + \cot.\ \alpha$$

$$\sin. (4R - \alpha) = - \sin. \alpha$$
$$\cos. (4R - \alpha) = + \cos. \alpha$$
$$\text{tang.} (4R - \alpha) = - \text{tang.} \alpha$$
$$\cot. (4R - \alpha) = - \cot. \alpha$$

Es will dieses sagen: Zwey Winkel, die einander zu zwey oder vier rechten ergänzen, gehören mit gleichen goniometrischen Linien zusammen; nur daß dieselben zum Theil entgegengesetzte Beziehungen auf einander haben. Dieses ist noch wahr, wenn man die mit 4R abgebrochenen Betrachtungen über 4, 8, 12 u. m. R fortsetzt; auch kehrt immer die nämliche Ordnung der Zeichen zurück.

§. 12.

Mann kann sich vorstellen, daß der Winkel ACE, nachdem er bis o abgenommen, in den entgegengesetzten Zustand ACe übergegangen, und negativ geworden sey. Unter dieser Voraussetzung bekommen auch die mit ihm zusammengehörigen goniometrischen Linien, den Cosinus ausgenommen, eine entgegengesetzte Lage, und werden negativ; und zwey Winkel, deren einer positiv, der andere negativ ist, haben, wenn sie sich zu 4R ergänzen, einerley goniometrische Linien, ihrer Größe und Beziehung nach.

Goniometrische Grundformeln.

§. 13.

Lehrsatz. Der Sinus eines Winkels ist der halben Sehne des doppelten Winkels gleich.

Be-

Beweis. Es sey $ECA = eCA$, so ist auch $ED = eD$, oder $ED = \frac{1}{2} Ee$; also, wenn α allgemein den Winkel, und ch. die Sehne bezeichnet, $\sin. \alpha = \frac{1}{2} \text{ch. } 2\alpha$.

§. 14.

Aufgabe. Der Sinus und Cosinus (Fig. 3.) zweyer Winkel, $ACB = \alpha$, und $BCK = \beta$, sind gegeben: man soll den Sinus und Cosinus der Summe beyder Winkel finden.

Auflösung. Es sey BD auf AC, und KL auf BC senkrecht, so ist $BD = \sin. \alpha$, $CD = \cos. \alpha$, $KL = \sin. \beta$, und $CL = \cos. \beta$. Ferner sey auch KM auf AC senkrecht, so ist $ACK = \alpha + \beta$, $KM = \sin. (\alpha + \beta)$, und $CM = \cos. (\alpha + \beta)$. Ueberdieß sey LP auf AC, und LO auf KM senkrecht, so ist

$$\sin. (\alpha + \beta) = KM = LP + KO, \text{ und}$$
$$\cos. (\alpha + \beta) = CM = CP - LO.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke BCD und LCP ist

$$CB : CL = BD : LP, \text{ oder}$$
$$1 : \cos. \beta = \sin. \alpha : LP = \sin. \alpha \cos. \beta.$$

Ferner ist, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke KLO und CBD,

$$CB : CD = KL : KO, \text{ oder}$$
$$1 : \cos. \alpha = \sin. \beta : KO = \sin. \beta \cos. \alpha.$$

Daher ist $\sin. (\alpha + \beta) = \sin. \alpha \cos. \beta + \sin. \beta \cos. \alpha$.

Wegen

Wegen der Aehnlichkeit eben dieser Dreyecke ist auch

$CB : CD = CL : CP$, oder

$1 : \text{cos}.\,\alpha = \text{cos}.\,\beta : CP = \text{cos}.\,\alpha\ \text{cos}.\,\beta$, und

$CB : BD = KL : OL$, oder

$1 : \text{sin}.\,\alpha = \text{sin}.\,\beta : OL = \text{sin}.\,\alpha\ \text{sin}.\,\beta$.

Daher ist auch $\text{cos}.\,(\alpha + \beta) = \text{cos}.\,\alpha\ \text{cos}.\,\beta - \text{sin}.\,\alpha\ \text{sin}.\,\beta$.

§. 15.

Nimmt man in den eben gefundenan beyden Formeln den Winkel β negativ an, so fließen daraus zwey andere:

$$\text{sin}.\,(\alpha - \beta) = \text{sin}.\,\alpha\ \text{cos}.\,\beta - \text{cos}.\,\alpha\ \text{sin}.\,\beta.$$
$$\text{cos}.\,(\alpha - \beta) = \text{cos}.\,\alpha\ \text{cos}.\,\beta + \text{sin}.\,\alpha\ \text{sin}.\,\beta.$$

§. 16.

Aufgabe. Der Sinus und Cosinus eines Winkels α sind gegeben: man soll den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels 2α finden.

Auflös. Man setze in den (§. 14.) für den Sinus und Cosinus der Summe zweyer Winkel gefundenen Ausdrücken $\alpha = \beta$, so wird

$$\text{sin}.\ 2\alpha = 2\,\text{sin}.\,\alpha\ \text{cos}.\,\alpha, \text{ und}$$
$$\text{cos}.\ 2\alpha = \text{cos}.\,\alpha^2 - \text{sin}.\,\alpha^2.$$

§. 17.

Aufgabe. Es ist der Cosinus eines doppelten Winkels 2α gegeben: man soll den Sinus und Cosinns des einfachen finden.

Auf-

Auflösung. Es war (§. 16.) $\cos. 2\alpha = \cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^2$. Addirt man diese Gleichung zu $1 = \cos. \alpha^2 + \sin. \alpha^2$, so erhält man

$1 + \cos. 2\alpha = 2 \cos. \alpha^2$, und

$1 - \cos. 2\alpha = 2 \sin. \alpha^2$, wenn man sie von einander subtrahirt. Aus dem erstern Ausdrucke ergiebt sich

$$\cos. \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos. 2\alpha}{2}}, \text{ und}$$

$$\sin. \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos. 2\alpha}{2}} \text{ aus dem letztern.}$$

§. 18.

Aufgabe. Aus den gegebenen Tangenten zweyer Winkel α und β die Tangente ihrer Summe und Differenz zu finden.

Auflös. Es ist $\tan. (\alpha + \beta) = \frac{\sin. (\alpha + \beta)}{\cos. (\alpha + \beta)}$ $= \frac{\sin. \alpha \cos. \beta + \sin. \beta \cos. \alpha}{\cos. \alpha \cos. \beta - \sin. \beta \sin. \alpha}$. Man dividire Zähler und Nenner mit $\cos. \alpha \cos. \beta$, so erhält man

$$\tan. (\alpha + \beta) = \frac{\tan. \alpha + \tan. \beta}{1 - \tan. \alpha \tan. \beta}, \text{ und}$$

wenn man sich den Winkel β als negativ vorstellt, auch

$$\tan. (\alpha - \beta) = \frac{\tan. \alpha - \tan. \beta}{1 + \tan. \alpha \tan. \beta}.$$

§. 19.

§. 19.

Diese Formeln dienten den Alten, zum Theil, zur Berechnung der goniometrischen Linien, sind aber auch für uns von mannigfaltigem Gebrauche, und durften darum nicht weggelassen werden. Sie sind außerordentlich fruchtbar, und eine Menge anderer, wenn wir deren zur gegenwärtigen Absicht nöthig hätten, liesse sich ohnschwer daraus ableiten. — Folgende Formel steht nur darum hier, weil sie in den gewöhnlichen Sammlungen nicht vorkömmt, und doch in der Polygonometrie gute Dienste leistet.

§. 20.

Aufgabe. Es sind von der Summe zweyer Winkel α und β, auch von dem Winkel α insbesondere Sinus und Cosinus gegeben: man soll den Cosinus von β finden.

Auflösung. Man multiplicire den Ausdruck für sin. $(\alpha + \beta)$ mit sin. α, und den für cos. $(\alpha + \beta)$ mit cos. α, so erhält man

$$\text{sin.}\alpha\ \text{sin.}(\alpha+\beta) = \text{sin.}\alpha^2\ \text{cos.}\beta + \text{sin.}\alpha\ \text{cos.}\alpha\ \text{sin.}\beta,$$

und

$$\text{cos.}\alpha\ \text{cos.}(\alpha+\beta) = \text{cos.}\alpha^2\ \text{cos.}\beta - \text{sin.}\alpha\ \text{cos.}\alpha\ \text{sin.}\beta,$$

und wenn man diese beyden Gleichungen addirt,

$$\text{sin.}\alpha\ \text{sin.}(\alpha+\beta) + \text{cos.}\alpha\ \text{cos.}(\alpha+\beta)$$
$$= (\text{sin.}\alpha^2 + \text{cos.}\alpha^2)\ \text{cos.}\beta = \text{cos.}\beta.$$

Grund-

Grundlegung zur allgemeinen Berechnung geradliniger Figuren.

§. 21.

Die Winkel einer geradlinigen Figur sind zum Theil hohle, zum Theil erhabene; von jenen sind die Schenkel auswärts, von diesen einwärts gekehrt. Die hohlen Winkel sind jedesmal kleiner, die erhabnen größer, als 2 R.

§. 22.

Daß die Summe aller Winkel (hohlen und erhabenen) einer Figur, so vielmal 2 R gleich ist, als diese Seiten hat, weniger zwey, ist schon aus der Planimetrie bekannt.

§. 23.

Die Ergänzungen der hohlen Winkel zu 2 R, und die Ueberschüsse der erhabenen über 2 R werden Nebenwinkel genannt.

§. 24.

Lehrsatz. Wenn eine Figur (Fig. 4.) lauter hohle Winkel hat, ist die Summe ihrer Nebenwinkel = 4 R.

Beweis. Es seyen a, b, c, d u. s. f. die hohlen Winkel, und A, B, C, D u. s. f. derselben Nebenwinkel, so ist

$A + a = 2R$
$B + b = 2R$
$C + c = 2R$
$D + d = 2R$
$E + e = 2R$ u. s. f.

Wenn

Wenn daher S die Summe aller hohlen Winkel, s die aller Nebenwinkel, und n die Zahl der Seiten bezeichnet, ist

$S + s = 2nR$. Nun ist

$S = (n - 2)\,2R$; also

$s = 2nR - (n-2)\,2R = (n - n + 2)\,2R$

$= 4R$.

§. 25.

Lehrsatz. Wenn eine Figur (Fig. 5.) hohle und erhabene Winkel hat, ist die Differenz ihrer Nebenwinkel $= 4R$.

Beweis. Es seyen a, b, c u. s. f. die Winkel einer Figur, A, B, C u. s. f. die Nebenwinkel derselben, so ist

$$A + a = 2R$$
$$B + b = 2R$$
$$c - C = 2R$$
$$D + d = 2R$$
$$E + e = 2R$$
$$f - F = 2R$$
$$G + g = 2R$$
$$H + h = 2R \text{ u. s. f.}$$

Bezeichnet nun S die Summe aller hohlen und erhabenen Winkel, ſ die Summe der Nebenwinkel von jenen, s die Summe der Nebenwinkel von diesen, so ist

$S + ſ - s = 2nR$.

Es

Es ist aber $S = (n - 2) 2R$; also

$$\mathfrak{f} - s = 2nR - (n-2) 2R = (n - n + 2) 2R = 4R.$$

§. 26.

Die Nebenwinkel der hohlen Winkel, und die Complemente von den Nebenwinkeln der erhabenen zu 4 R, werden **äußere Winkel** genannt.

§. 27.

In jeder Figur, die lauter hohle Winkel hat, ist daher die Summe der äußern Winkel = 4 R (§. 24.)

§. 28.

Lehrsatz. In jeder Figur, die hohle und erhabene Winkel hat, ist die Summe der äußern Winkel so vielmal 4 R gleich, als dieselbe erhabene Winkel hat, mehr eins.

Beweis. Es sey m die Zahl der erhabenen Winkel, so ist $4mR - s$ die Summe aller äußern Winkel, welche mit den erhabenen zusammen gehören; denn man erhält jeden äußern Winkel eines erhabenen innern, wenn man von 4 R den zugehörigen Nebenwinkel abzieht. Es ist aber $\mathfrak{f}$ die Summe aller äußern Winkel, welche mit den hohlen innern zusammen gehören; daher ist $\mathfrak{f} + 4mR - s$ die Summe aller äußern Winkel, sowohl jener, welche mit den erhabenen, als dieser, welche mit den hohlen innern zusammengehörig sind. Nun ist $\mathfrak{f} - s = 4R$ (§. 25.); also

$$\mathfrak{f} + 4mR - s = 4R + 4mR = (m + 1) 4R.$$

§. 29.

Lehrsatz. Wenn in einer Figur (Fig. 6.) zwey oder mehrere Seiten einander schneiden, ist nichts desto weniger die Summe der äußern Winkel so vielmal 4R gleich, als dieselbe erhabene Winkel hat, mehr eins.

Beweis. Es sey ABCDEF eine solche Figur. Man stelle sich dieselbe, aus der AB$\gamma\delta\varepsilon$F entstanden, vor, so sind die Winkel C und E als erhabene anzusehen, und der mit F zusammengehörige äußere Winkel ist um so viel größer, als 2R, als AFE beträgt. Setzt man daher BAF = a, ABC = b, BCD = c, CDE = d; DEF = e, und EFA = f, und nimmt an, A, B, C, D, E und F seyen die mit selben zusammengehörigen äußern Winkel, so ist

$$A = 2R - a$$
$$B = 2R - b$$
$$C = 2R + c$$
$$D = 2R - d$$
$$E = 2R + e$$
$$F = 2R + f; \text{ also}$$

$$A+B+C+D+E+F = 3.\,4R+c+e+f-a-b-d$$
$$= (2+1)4R+c+e+f-a-b-d.$$

Nun ist, A ◦ C = D ◦ F = ϕ angenommen, $a + b = c + \phi$, und $e + f = d + \phi$; also

$a + b + d = c + e + f$; folglich

$A + B + C + D + E + F = (2 + 1)\,4R.$

Daher ist wieder allgemein $\int + 4mR - s = (m+1)\,4R.$

§. 30.

§. 30.

Stellt man sich zwey, einen und denselben Winkel einschließende Seiten einer Figur, als unendlich lang vor, so sind sie als parallel, und der eingeschlossene Winkel als $= 0$, folglich der mit demselben zusammengehörige äußere als $= 2R$ anzusehen, und die Summe der übrigen äußern Winkel ist $= (m + 1) 4R - 2R = (2m + 1) 2R$. Daher, wenn man zwischen zweyen Parallelen eine gebrochene Linie (Fig. 7.) ABCD zieht, ist die Summe aller äußern Winkel so vielmal zweyen rechten gleich, als die gedoppelte Zahl der erhabenen Winkel mehr eins anzeigt.

§. 31.

Wenn man auf was immer für eine Seite einer Figur, die nach Erforderniß auch verlängert werden mag, aus den gegenüberstehenden Eckpunkten Perpendikel fällt, so heißen diese die **Breiten**, und die Stücke, welche sie abschneiden, immer von einem und demselben Punkte an gerechnet, die **Längen der Eckpunkte**, und endlich die Seite der Figur, worauf die Längen gezählt werden, die **Längenlinie**. Sind für eine angenommene Längenlinie die, mit jedem Eckpunkte einer Figur zusammengehörigen Längen und Breiten bekannt, so ist die Natur der geradlinigen Figur bestimmt. Wenn sich daher zwey Gleichungen finden lassen, welche die mit jedem Eckpunkte einer geradlinigen Figur zusammengehörigen Längen und Breiten auf eine allgemeine Weise ausdrücken, so bestimmen diese Gleichungen die Natur jeder geradlinigen Figur.

§. 32.

Aufgabe. Aus den gegebenen erforderlichen Seiten und Winkeln einer geradlinigen Figur die zwey Gleichungen zu finden, welche ihre Natur bestimmen.

Auflösung. Es sey (Fig. 6.) ABCDEF eine sechsseitige Figur von hohlen und erhabenen Winkeln, auch solchen Seiten, deren einige einander schneiden. Man nehme AF zur Längenlinie an, ziehe durch C und E die Linien np und qE mit selber parallel, und fälle aus den gegenüberliegenden Punkten B und D die Perpendikel Bm, Bn, Dp und Dq, und wieder aus E das Perpendikel Er, so entstehen die rechtwinkligen Dreyecke ABm, BCn, DCp, DEq und EFr, welche die Lage der Eckpunkte B, C, D, E und F gegen die Linie AF bestimmen. Denn der Eckpunkt

B hat zur Breite Bm
Länge Am;

C hat zur Breite Bm — Bn = Ct
Länge Am + Cn = At;

D hat zur Breite Bm — Bn + Dp = Ds
Länge Am + Cn + Cp = As;

E hat zur Breite Bm — Bn + Dp — Dq = Er
Länge Am + Cn + Cp + Eq = Ar;

F hat zur Breite Bm — Bn + Dp — Dq + Er = o
Länge Am + Cn + Cp + Eq + Fr = AF.

Man

Man setze nun den Winkel BAm $= \alpha$, BCn $= \beta$ DCp $= \gamma$, DEq $= \delta$, und EFr $= \varepsilon$, so ist

$\alpha = 2R - A;$

$\beta = 2R - (\alpha + 2R - B) = A + B - 2R;$

$\gamma = 4R - (C + \beta) = 4R - (A + B + C - 2R)$
$= 6R - (A + B + C);$

$\delta = 2R - (\gamma + 2R - D) = 2R - (6R - (A + B + C)$
$+ 2R - D) = A + B + C + D - 6R;$

$\varepsilon = 2R - (\delta + E - 2R) = 2R - (A + B + C$
$+ D + E - 8R) = 10R - (A + B + C + D + E)$

und vermöge (§. 15.)

$\sin. \alpha = + \sin. A$
$\cos. \alpha = - \cos. A;$

$\sin. \beta = - \sin. (A + B)$
$\cos. \beta = - \cos. (A + B);$

$\sin. \gamma = + \sin. (A + B + C)$
$\cos. \gamma = - \cos. (A + B + C);$

$\sin. \delta = - \sin. (A + B + C + D)$
$\cos. \delta = - \cos. (A + B + C + D);$

$\sin. \varepsilon = + \sin. (A + B + C + D + E)$
$\cos. \varepsilon = - \cos. (A + B + C + D + E).$

Es ist aber nach (§. 6.) $\sin. \alpha = \frac{Bm}{AB}$, und $\cos. \alpha = \frac{Am}{AB}$; also

$$Bm = AB \sin. \alpha = + a \sin. A, \text{ und}$$
$$Am = AB \cos. \alpha = - a \cos. A.$$

Eben so findet man auch

$$Bn = - b \sin. (A + B)$$
$$Cn = - b \cos. (A + B);$$
$$Dp = + c \sin. (A + B + C)$$
$$Cp = - c \cos. (A + B + C);$$
$$Dq = - d \sin. (A + B + C + D)$$
$$Eq = - d \cos. (A + B + C + D);$$
$$Er = + e \sin. (A + B + C + D + E)$$
$$Fr = - e \cos. (A + B + C + D + E).$$

Daher ist endlich

$$a \sin. A + b \sin. (A+B) + c \sin. (A+B+C) + d \sin. (A+B+C+D) + e \sin. (A+B+C+D+E) = 0, \text{ und}$$

$$a \cos. A + b \cos. (A+B) + c \cos. (A+B+C) + d \cos. (A+B+C+D) + e \cos. (A+B+C+D+E) = - f.$$

Es ist begreiflich, wie diese zwey Gleichungen für jede mehrseitige Figur weiter fortgesetzt, und für jede

weni=

wenigerseitige abgebrochen werden möge. Daher sind sie ganz allgemein.

§. 33.

Diese beyden Gleichungen sind die Grundlage von der sämmentlichen Trigonometrie und Polygonometrie, wie wir in der Folge zeigen werden.

Trigonometrie.

Die vornehmsten trigonometrischen Formeln.

§. 34.

Von den drey Stücken eines Dreyeckes, aus welchen die übrigen drey bestimmt werden sollen, muß wenigst eines eine Seite seyn. Nach dieser Voraussetzung sind alle besondere Fälle, welche vorkommen können, unter den folgenden allgemeinen begriffen:

1) Die drey gegebenen Stücke, und das eine gesuchte, sind zwey Seiten und die beyden gegenüber stehenden Winkel; oder

2) zwey Seiten und zwey Winkel, deren einer von diesen eingeschlossen ist; oder

3) drey Seiten und ein Winkel.

Für diese drey Verbindungen zwischen vier Stücken eines Dreyeckes muß es also auch drey Gleichungen geben, welche wir nun aufsuchen wollen.

§. 35.

Aufgabe. Zwischen zweyen Seiten, und den gegenüber stehenden zweyen Winkeln eines Dreyeckes eine Gleichung zu finden.

Auflösung. Die erste Grundgleichung verwandelt sich für das Dreyeck (Fig. 8.) in diese: $a \sin. A + b \sin. (A + B) = 0$. Nun ist $C = 4R - (A + B)$; also $A + B = 4R - C$, und $\sin. (A + B) = - \sin. C$; folglich $a \sin. A - b \sin. C = 0$, oder $a \sin. A = b \sin. C$.

§. 36.

Man ist gewöhnt in der Trigonometrie sich nur der innern Winkel zu bedienen; auch pflegt man hier, zum Behufe unserer Vorstellungskraft, die Seiten, und die denselben gegenüber stehenden Winkel durch ähnliche Buchstaben auszudrücken. Diesem gemäß bedeuten künftig, doch einsweilen nur für diesen ersten Hauptfall (Fig. 9.) A, B, C die innern Winkel, und a, b, c die denselben gegenüber stehenden Seiten, so ist $c \sin. A = a \sin. C$, oder

$$b \sin. C = c \sin. B, \text{ oder}$$

$$a \sin. B = b \sin. A.$$

§. 37.

Aufgabe. Zwischen zweyen Seiten und zweyen Winkeln, deren einer von diesen Seiten eingeschlossen ist, eine Gleichung zu finden.

Auflösung. Es ist allgemein (Fig. 8.) $a \sin. A + b \sin. (A + B) = 0$; also (§. 15.) $a \sin. A + b (\sin. A \cos. B + \cos. A \sin. B) = 0$; oder $\sin. A (a + b \cos. B) + b \cos. A \sin. B = 0$;

folglich $\frac{\sin. A}{\cos. A} = \text{tang.}\, A = \frac{-b \sin. B}{a + b \cos. B}$.

§. 38.

Bedeuten auch für diesen zweyten Hauptfall (Fig. 9.) A, B, C die innern Winkel, und a, b, c die denselben gegenüber stehenden Seiten, so verwandelt sich die eben gefundene Gleichung in diese:

$\text{tang}\, (2R - A) = \frac{-a \sin. B}{c + a \cos. (2R - B)}$; oder

$\text{tang.}\, A = \frac{a \sin. B}{c - a \cos. B}$.

§. 39.

Es erhält diese Formel eine zur Rechnung bequemere Gestalt, wenn man setzt

$\cot.\, A = \frac{c - a \cos. B}{a \sin. B} = \frac{c}{a \sin. B} - \frac{a \cos. B}{a \sin. B}$

$= \frac{c}{a \sin. B} - \cot.\, B.$

§. 40.

§. 40.

Aufgabe. Zwischen drey Seiten und einem Winkel eine Gleichung zu finden.

Auflösung. Es ist (Fig. 8.) wieder a sin. A + b sin. (A + B) = o; aber auch a cos. A + b cos. (A + B) = − c. In diesen letztern Ausdruck verwandelt sich für das Dreyeck die zweyte allgemeine Grundgleichung. Man quadrire diese beyden Gleichungen, und addire die Quadrate, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \sin. A^2 + 2\,ab \sin. A \sin. (A+B) \\ \quad + b^2 \sin. (A+B)^2 \\ a^2 \cos. A^2 + 2\,ab \cos. A \cos. (A+B) \\ \quad + b^2 \cos. (A+B)^2 \end{array}\right\} = c^2; \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + 2\,ab\,(\sin. A \sin. (A+B) \\ \quad + \cos. A \cos. (A+B)) \end{array}\right\} = c^2$$

und daher (§. 20.)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab \cos. B.}$$

§. 41.

Bedeuten endlich auch für diesen dritten Hauptfall (Fig. 9.) A, B, C die innern Winkel, und a, b, c die denselben gegenüber stehenden Seiten, so ergiebt sich

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\,ac \cos. B.}$$

§. 42.

Auch diese Formel läßt sich bequemer zur Rechnung darstellen. Denn da

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos. B = ac\left(\frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos. B}{ac}\right)$$

so wird

$$b = \sqrt{ac\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\cos. B\right)}.$$

§. 43.

Vermittelst dieser drey Gleichungen lassen sich nun alle, auf Berechnung recht- und schiefwinkeliger Dreyecke abzweckenden trigonometrischen Aufgaben ohne besondere Beschwerniß auflösen.

§. 44.

Der erste Hauptfall (§. 34.) begreift folgende zwey Nebenfälle unter sich:

1) Zwey Winkel, und eine Seite sind gegeben, und die andere Seite wird gesucht;

2) Zwey Seiten, und ein Winkel sind gegeben, und der andere Winkel wird gesucht.

§. 45.

Aufgabe. Es sind zwey Winkel, und eine Seite gegeben: man soll die andere Seite finden.

Auf-

Auflösung. Es seyen A und C die gegebenen Winkel, a die gegebene, und c die zu suchende Seite, so ist

$$c \sin. A = a \sin. C;$$ also

$$c = \frac{a \sin. C}{\sin. A}.$$

Z. B. Es sey $A = 40°$; $C = 35° 27'$; $a = 5247$, und c soll gesucht werden. Die Rechnung ist diese:

$$\begin{aligned} \log. \sin. C &= 9{,}7634222 \\ \log. a &= 3{,}7199111 \\ \hline &\quad 13{,}4833333 \\ \log. \sin. A &= 9{,}8080675 \\ \hline &\quad 3{,}6752658 = \log. 4735; \text{ also} \end{aligned}$$

$$b = 4735.$$

§. 46.

Wäre aber die zu suchende Seite nicht c, welche dem Winkel C, sondern b, welche dem nicht gegebenen Winkel B gegenüber steht, so dürfte man nur aus den gegebenen beyden Winkeln A und C, den nicht gegebenen B suchen, um dann auch die ihm gegenüber stehende Seite b finden zu können.

§. 47.

Unter der Voraussetzung, daß das Dreyeck rechtwinkelig sey, nimmt die Gleichung für den ersten Hauptfall

fall (§. 34.) eine etwas verschiedene, auch mehrfache Gestalt an, je, nachdem dieses oder jenes Paar entgegengesetzter Seiten und Winkel miteinander verglichen werden sollen. Da überhaupt nur drey solche Vergleichungen möglich sind, haben auch nur drey, nicht mehrere verschiedene Formen dieser Gleichung, wie überhaupt, so auch in Ansehung der rechtwinkeligen Dreyecke insbesondere Statt. Denn es seyen A der rechte, B und C die spitzigen Winkel, und a die Hypothenuse, b und c die Catheten eines rechtwinkeligen Dreyeckes, so ist

$$c = a \text{ sin. } C = a \text{ cos. } B$$

$$b = c \text{ tang. } B = c \text{ cot. } C$$

$$a \text{ sin. } B = a \text{ cos. } C = b.$$

Nach diesen Formeln lassen sich die rechtwinkeligen Dreyecke, unter den schon angezeigten Voraussetzungen, ohnschwer berechnen.

§. 48.

Aufgabe. Es sind zwey Seiten, und einer der gegenüber stehenden Winkel gegeben: man soll den andern finden.

Auflösung. Es seyen a und c die gegebenen Seiten, A der gegebene, und C der zu suchende Winkel, so ist

$$a \text{ sin. } C = c \text{ sin. } A; \text{ also}$$

$$\text{sin. } C = \frac{c \text{ sin. } A}{a}.$$

z. B. Es sey a = 5247; c = 4734; A = 40°, und C soll gesuchet werden.

$$\begin{aligned} \log. \sin. A &= 9{,}8080675 \\ \log. c &= 3{,}6752283 \\ \hline & 13{,}4832958 \\ \log. a &= 3{,}7199327 \\ \hline & 9{,}7633631 = \log. \sin. 35° 27'; \end{aligned}$$

also C = 35° 27'.

§. 49.

Sollte nicht der Winkel C, welcher der gegebenen Seite c gegenüber steht, sondern B gesuchet werden, so müßte man nichts desto weniger zuerst C, und dann aus dem gefundenen C, und gegebenen A, auch B gesuchet werden.

§. 50.

Wenn das Dreyeck rechtwinkelig ist, können die demselben (§. 47.) besonders geeigneten Formeln auch hier angewandt werden.

§. 51.

Der zweyte Hauptfall begreift keinen Nebenfall in sich, der nicht schon in dem ersten enthalten ist. Daher bleibt uns hier eine einzige Aufgabe aufzulösen übrig.

§. 52.

Aufgabe. Es sind zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben: man soll einen der beyden übrigen finden.

Auflösung. Es seyen a und c die gegebenen Seiten, B der gegebene Winkel, und A der, welcher gesuchet werden soll, so ist

$$\cot. A = \frac{c}{a \sin. B} - \cot. B.$$

Z. E. Es sey a = 5247; c = 4734; B = 104° 33', und A soll gesuchet werden.

$$\log. \sin. B = 9,9858434$$
$$\log. a = 3,7199327$$
$$13,7057761 - 10$$
$$\log. c = 3,6752283 + 4 - 4$$
$$3,9694522 - 4 = \log. 0,9321;$$

$$\text{also } \frac{c}{a \sin. B} = 0,9321$$
$$\cot. B = 0,2595488$$
$$1,1916488 = \cot. 40°; \text{ also}$$
$$A = 40°.$$

§. 53.

Anfänger begreifen oft leichter ziemlich schwere Beweise, als sie, wegen gewisser Beschwernisse, ein Zahlenbey-

beyspiel bearbeiten. Diese nur scheinbaren Beschwernisse ein = für allemal zu zerstreuen, mögen folgende drey Anmerkungen dienen.

1) Daß cot. B, wenn B stumpf ist, addirt werden muß, erhellet schon aus den ersten Grundbegriffen sowohl von entgegengesetzten Größen, als den goniometrischen Linien (§. 11.), und bedarf keines fernern Beweises.

2) Ist der negative Theil größer, als der positive, und fällt daher tang. A negativ aus, so zeigt dieß an, daß A stumpf ist. In diesem Falle suchet man den Winkel, der mit der negativen Cotangente, als positiv betrachtet, zusammen gehört, und addirt 90° dazu; so wie man, wenn sie positiv ist, sie als Tangente betrachtet, und den mit selber zusammengehörigen Winkel von 90° subtrahirt.

3) Wenn man mit Tangenten selbst rechnet, muß man in den Tafeln 7 Ziffer von der Rechten zur Linken abschneiden, weil in denselben r = 10000000 angenommen wird. Die Ziffer, oder die Ziffern, welche dann gegen die Linke überbleiben, sind als Ganze zu betrachten. Auch umgekehrt, wenn man eine Tangente hat, die aus einer ganzen Zahl, und noch einigen Decimalziffern besteht, muß man in den Tafeln eine Tangente suchen, welche diese ganze Zahl mit noch 7 Decimalziffern, die den gegebenen am nächsten kommen, enthalte.

§. 54.

§. 54.

Setzt man, das Dreyeck sey rechtwinkelig, und B = R, so ist sin. B = 1, und

cot. B = 0; also

cot. A = $\frac{c}{a}$ (§. 6.).

§. 55.

Der dritte Hauptfall begreift drey Nebenfälle in sich:

1) Zwey Seiten mit dem zwischenliegenden Winkel sind gegeben, und die dritte Seite wird gesucht.

2) Drey Seiten sind gegeben, und ein Winkel wird gesucht.

3) Ein Winkel, und zwey denselben nicht einschliessende Seiten sind gegeben, und die dritte wird gesucht.

§. 56.

Aufgabe. Es sind zwey Seiten mit dem zwischenliegenden Winkel gegeben: man soll die dritte Seite finden.

Auflösung. Es seyen a und c die gegebenen Seiten, B der gegebene Winkel, und b die Seite, welche gesuchet werden soll, so ist

$$b = \sqrt{ac\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\cos. B\right)}.$$

Z. B. Es sey a = 5247; c = 4734; B = 104° 33', und b soll gesuchet werden.

$$\log. a = 3{,}7199327$$
$$\log. c = 3{,}6752283$$
$$\log. \frac{a}{c} = 0{,}0447044 = \log. 1{,}1083$$
$$\log. \frac{c}{a} = 9{,}9552956 - 10 = \log. 0{,}9022$$
$$2 \cos. B = 0{,}5024$$
$$0{,}4001752 = \log. 2{,}5129$$
$$3{,}7199327 = \log. a$$
$$3{,}6752283 = \log. c$$
$$7{,}7953362 = \log. b^2$$
$$3{,}8976682 = \log. b = \log. 7901;$$

also $b = 7901$.

§. 57.

Ist das Dreyeck rechtwinkelig, und B = R, so erhält man für diesen Fall

$$b = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Wenn aber unter eben der Voraussetzung, daß das Dreyeck rechtwinkelig sey, der Winkel B spitzig ist, dann mag

mag diese Aufgabe leichter vermittelst der ersten allgemeinen Gleichung (§. 35.) aufgelöset werden.

§. 58.

Aufgabe. Es sind alle drey Seiten gegeben: man soll einen der drey übrigen Winkel finden.

Auflösung. Es seyen a, b, c die gegebenen Seiten, und B der Winkel, welcher gesuchet werden soll, so ist (§. 41.)

$$\cos. B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a+b)(a-b)}{2ac} + \frac{c}{2a}.$$

Z. B. Es sey a = 5247; b = 7901; c = 4734, und B soll gesuchet werden.

$$\begin{aligned} a &= 5247 \\ b &= 7901 \\ \hline a + b &= 13148 \\ a - b &= -2654 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \log.(a+b) = 4{,}1188597 & \log. 2 = 0{,}3010300 \\ \log.(a-b) = \underline{3{,}4239009} & \log. a = 3{,}7199327 \\ \quad 7{,}5427606 & \log. c = \underline{3{,}6752283} \\ \quad \underline{7{,}6961910} & \quad 7{,}6961910 \\ \quad 0{,}8465696 - 1 = \log. 0{,}7024; & \end{array}$$

also $\frac{(a+b)(a-b)}{2ac} = -0{,}7024.$

log.

$$\log. c = 3{,}6752283$$
$$\log. 2a = 4{,}0209627$$

$$0{,}6542656 - 1 = \log. 0{,}4511;$$ also

$$\frac{c}{2a} = 0{,}4511;$$ folglich

$$\cos. B = 0{,}4511 - 0{,}7024 = - 0{,}2513$$
$$= \cos. 75^\circ\ 27',$$ und daher
$$B = 2R - 75^\circ\ 27' = 104^\circ\ 33'.$$

§. 59.

Die hier gebrauchte Gleichung ist verschiedener, zur Rechnung bequemerer Gestalten fähig. Denn es ist

$$1 + \cos. B = 1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{2ac}$$

und

$$1 - \cos. B = 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(b + a - c)(b - a + c)}{2ac}$$

Nun ist nach (§. 17.)

$$\cos. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{1 + \cos. B}{2},$$ und $$\sin. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{1 - \cos. B}{2};$$

also

$$\cos. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{(a + b + c)(a - b + c)}{4ac},$$ und

$$\sin. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{(a + b - c)(- a + b + c)}{4ac};$$ folglich auch

$$\tang. \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{(a + b - c)(- a + b + c)}{(a + b + c)(a - b + c)}.$$

Weil

Weil auch $(1 + \cos. B)(1 - \cos. B) = \sin. B^2$, so ist

$$\sin. B^2 = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4 a^2 c^2}.$$

Man mag aber was immer für einer Formel sich bedienen, müssen doch allemal die Seiten mit aller nur möglichen Genauigkeit gemessen seyn worden, wenn die daraus erhaltenen Winkel richtig seyn sollen.

§. 60.

Aufgabe. Es sind ein Winkel, und zwey denselben nicht einschließende Seiten gegeben: man soll die dritte finden.

Auflösung. Es seyen B der gegebene Winkel, b und c die gegebenen Seiten, und a die Seite, welche gesucht werden soll. Da allgemein

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos. B}$, so folgt daraus

$$a = c \cos. B + \sqrt{b^2 - c^2 + c^2 \cos. B^2}$$
$$= c \cos. B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin. B^2}$$
$$= c \cos. B + \sqrt{(b + c \sin. B)(b - c \sin. B)}$$

Z. B. Es sey $B = 104° 33'$; $b = 7901$; $c = 4734$, und a soll gesucht werden.

log. sin. B = 9,9858434	log. cos. B = 9,4000625
log. c = 3,6752283	log. c = 3,6752283
13,6610717 − 10; also	13,0752908
	+ 10

$$c \sin. B = 4582,175 \quad c \cos. B = 1189,298$$
$$b = 7901$$

$$b + c \sin. B = 12483,175$$
$$b - c \sin. B = 3318,825$$

$$\log. (b + c \sin. B) = 4,0963250$$
$$\log. (b - c \sin. B) = 3,5209844$$
$$7,6173094 : 2$$
$$3,8086547 ; \text{also}$$

$$\sqrt{(b + c \sin. B)(b - c \sin. B)} = 6436,573$$
$$c \cos. B = 1189,298$$
$$a = 5247,2$$

§. 61.

Leichter läßt sich diese Aufgabe vermittelst der ersten Gleichung (§. 36.) auflösen, indem man vorher einen zweyten Winkel, und dann erst die dritte Seite suchet.

Anwendung auf die Messung unzugänglicher Weiten und Höhen.

§. 62.

Ich übergehe hier jene leichtern Aufgaben, deren Auflösung nur unmittelbare Anwendung der bisher gefundenen Formeln ist; jene allein, welche in einigen davon abgeleiteten Gleichungen den Grund ihrer Auflösung ha-

haben, werde ich hier so kurz und deutlich, als möglich ist, vorzutragen bemühet seyn.

§. 63.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer unzugänglichen Oerter aus zweyen angenommenen Standpunkten zu messen.

Auflösung. Es seyen A und D (Fig. 10.) die unzugänglichen Oerter, B und C die angenommenen Standpunkte. Man messe aus dem Stande B die Winkel ABD $= \alpha$, und DBC $= \beta$, aus dem Stande C aber die Winkel DCA $= \delta$, und ACB $= \gamma$, und am Ende noch die Standlinie BC selbst. Der Kürze wegen setze man $\alpha + \beta + \gamma = \phi$; $\beta + \gamma + \delta = \psi$, und $\alpha + \beta = \lambda$, so ist

$$\text{sin.}\,\phi : \text{sin.}\,\lambda = BC : AC = \frac{BC\ \text{sin.}\,\lambda}{\text{sin.}\,\phi}, \text{ und}$$

$$\text{sin.}\,\psi : \text{sin.}\,\beta = BC : CD = \frac{BC\ \text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\psi}; \text{ also } (\S.\ 41.)$$

$$AD = BC \sqrt{\frac{\text{sin.}\,\lambda^2}{\text{sin.}\,\phi^2} + \frac{\text{sin.}\,\beta^2}{\text{sin.}\,\psi^2} - \frac{2\,\text{sin.}\,\lambda\ \text{sin.}\,\beta\ \text{cos.}\,\delta}{\text{sin.}\,\phi\ \text{sin.}\,\psi}}$$

Z. B. Es sey BC $= 2100$; $\alpha = 84^\circ\ 30'$; $\beta = 51^\circ$; $\gamma = 19^\circ\ 20'$; $\delta = 71^\circ$, so ist $\phi = 154^\circ\ 50'$; $\psi = 141^\circ\ 20'$, und $\lambda = 135^\circ\ 30$; also sin. ϕ = sin. $25^\circ\ 10'$; sin. ψ = sin. $38^\circ\ 40'$, und sin. λ = sin. $44^\circ\ 30'$.

$$\log.\ \sin.\lambda = 9,8456618$$
$$\log.\ \sin.\phi = 9,6286472$$
$$0,2170146$$
$$\times 2$$
$$\log.\frac{\sin.\lambda^2}{\sin.\phi^2} = 0,4340292$$
$$\frac{\sin.\lambda^2}{\sin.\phi^2} = 2,718$$
$$\log.\ \sin.\beta = 9,8905026$$
$$\log.\ \sin.\psi = 9,7957330$$
$$0,0947696$$
$$\times 2$$
$$\log.\frac{\sin.\beta^2}{\sin.\psi^2} = 0,1895392$$
$$\frac{\sin.\beta^2}{\sin.\psi^2} = 1,547$$

$$\log.\ \sin.\lambda = 9,8456618$$
$$\log.\ \sin.\beta = 9,8905026$$
$$\log.\ \cos.\delta = 9,5126419$$
$$\log.2 = 0,3010300$$
$$29,5498363$$
$$-10$$
$$\log.\ \sin.\phi = 9,6286472$$
$$\log.\ \sin.\psi = 9,7957330$$
$$19,4243802$$
$$\log.1,339 = 0,1254561$$
$$1,335 = \frac{2\sin.\lambda\sin.\beta\cos.\delta}{\sin.\phi\ \sin.\psi}$$

$$\frac{\sin.\lambda^2}{\sin.\phi^2} + \frac{\sin.\beta^2}{\sin.\psi^2} = 4,265$$
$$-\ 1,335$$
$$2,93$$
$$\sqrt{2,93} = 1,7117$$
$$BC = 2100$$
$$AD = 3594,57.$$

§. 64.

Aus Betrachtung der gefundenen Gleichung erhellet, daß man mit Hilfe derselben eben so gut auch die Weite BC finden könnte, wenn diese unbekannt, die andere AD aber schon mittelbar oder unmittelbar gemessen worden wäre. Daher dienet eine und dieselbe Gleichung sowohl eine unzugängliche Weite aus der Standlinie, als diese aus jener zu bestimmen. Beyde Fälle kommen bey Landesvermessungen öfters vor.

§. 65.

Aufgabe. Es ist die Lage dreyer Oerter A, B, C (Fig 10.) gegeben: die Entfernung eines vierten Ortes D von jedem derselben zu finden.

Auflösung. Man messe aus D die Winkel BDC und BDA, so ergeben sich zwey Dreyecke BCD und ABD, von welchen, wenn nur der Winkel BCD oder BAD bekannt wäre, die Seiten CD, BD, AD ohnschwer gefunden werden könnten. Daher kömmt hier alles darauf an, daß z. B. der Winkel BCD gefunden werde. Es sey demnach der gegebene Winkel ABC $= \varepsilon$, der eine gemessene BDC $= \gamma$, der andere BDA $= \delta$, und der zu suchende BCD $= \omega$, so ist BAD $= 4R - (\gamma + \delta + \varepsilon + \omega) = \phi - \omega$, wenn $4R - (\gamma + \delta + \varepsilon) = \phi$ gesetzt wird, und man erhält für die Dreyecke BCD und ABD folgende zwey Gleichungen (§. 36.)

$$BD \sin. \gamma = BC \sin. \omega, \text{ und}$$

$$BD \sin. \delta = AB \sin. (\phi - \omega); \text{ also}$$

BC

$$\frac{BC\ \text{sin.}\ \omega}{\text{sin.}\ \gamma} = \frac{AB\ \text{sin.}\ (\phi - \omega)}{\text{sin.}\ \delta}, \text{ oder}$$

$$\frac{BC\ \text{sin.}\ \delta}{AB\ \text{sin.}\ \gamma} = \frac{\text{sin.}\ (\phi - \omega)}{\text{sin.}\ \omega} = \text{sin.}\ \phi\ \text{cot.}\ \omega - \text{cos.}\ \phi$$

(§. 15.); folglich

$$\text{cot.}\ \omega = \frac{BC\ \text{sin.}\ \delta}{AB\ \text{sin.}\ \gamma\ \text{sin.}\ \phi} + \text{cot.}\ \phi.$$

Z. B. Es sey $BC = 87$; $AB = 80,5$; $ABC = \varepsilon = 167^\circ\ 30'$; ferner $BDC = \gamma = 30^\circ\ 45'$; $BDA = \delta = 23^\circ\ 15'$; $\phi = 138^\circ\ 30'$, und $BCD = \omega$ soll gesuchet werden.

$\log.\ \text{sin.}\ \delta = 9,5963154$ $\log.\ \text{sin.}\ \gamma = 9,7086699$

$\log.\ BC = 1,9395193$ $\log.\ AB = 1,9057959$

$11,5358347 - 10$ $\log.\ \text{sin.}\ \phi = 9,8212646$

$21,4357304 - 20$ $21,4357304$

-20

$0,1001043 = \log.\ 1,259$

$\text{cot.}\ \phi = -1,13029$

$\text{cot.}\ 82^\circ\ 39' = 0,12871$; also

$\omega = 82^\circ\ 40'$.

Ist nun der Winkel BCD gefunden, so ergiebt sich auch der Winkel BAD: und dann lassen sich die Entfernungen CD, BD, AD auf gewöhnliche Weise berechnen.

§. 66.

§. 66.

Diese Auflösung ist ganz allgemein, und wo immer der Ort D gelegen seyn mag, gleich anwendbar; selbst den besondern Fall, wo A, B, C in gerader Linie liegen, nicht ausgenommen. Im Falle aber, wo D entweder auf der Seite AC selbst, zwischen A und C, oder auf der verlängerten AC, über C hinaus, zu liegen kömmt, fällt die vorläufige Bestimmung des Winkels BCD, der nun dem schon bekannten BCA gleich ist, ganz weg, und man kann gleich unmittelbar aus den in D gemessenen zweyen, oder einem Winkel, die Entfernungen des Ortes D durch eine leichte Rechnung finden. — Auch diese Aufgabe ist dem Landmesser sehr zu empfehlen; zumal als sie auch viel Richtigkeit gewähret, wenn nur die vier Oerter jedesmal schicklich für einander gewählet worden.

§. 67.

Aufgabe. Es seyen (Fig. 11.) A′B zweyer Oerter A, B horizontale Entfernung, und AA′ des erstern A Höhe über dem Horizonte bekannt: man soll eines dritten Ortes E Höhe ED über A, oder Höhe EC über A′ finden.

Auflösung. Man messe aus E die beyden vertikalen Winkel AED $= \alpha$, BEC $= \beta$, und auch den Winkel A′CB $= \gamma$, unter welchem die durch EA und EB gelegten vertikalen Ebenen sich schneiden. Da die Dreyecke EDA, ECB bey D und C rechtwinkelig sind, so ist

$$AD = A'C = ED \text{ tang. } \alpha, \text{ und}$$

$$BC = (AA' + ED) \text{ tang. } \beta. \quad \text{Daher ist}$$

A′B²

$$A'B^2 = ED^2 \text{ tang. } \alpha^2 + (AA' + ED)^2 \text{ tang. } \beta^2$$
$$- 2 (AA' \times ED + ED^2) \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \beta \text{ cos. } \gamma$$
$$= ED^2 (\text{tang. } \alpha^2 + \text{tang. } \beta^2 - 2 \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \beta \text{ cos. } \gamma)$$
$$+ ED (2 AA' \text{ tang. } \beta^2 - 2 AA' \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \beta \text{ cos. } \gamma)$$
$$+ A'A^2 \text{ tang. } \beta^2.$$

Man setze die mit ED^2 multiplicirte Größe $= P$, die mit ED multiplicirte $= Q$, und $A'A^2$ tang. $\beta^2 = R$, so wird

$$A'B^2 = ED^2 \times P + ED \times Q + R, \text{ und}$$

$$ED = \frac{1}{2P}\left(\pm \sqrt{Q^2 + 4P(A'B^2 - R)} - 2Q\right)$$

§. 68.

Daß die Auflösung dieser Aufgabe in Zahlen mühesam ist, brauche ich nicht erst zu erinnern; allein im Falle, wo $AA' = 0$, folglich $Q = 0 = R$ ist, wird sie wieder um das leichter. Man erhält dann

$$EC = A'B \sqrt{\frac{1}{P}} = A'B \sqrt{\frac{\text{cot. } \alpha \text{ cot. } \beta}{\frac{\text{cot. } \beta}{\text{cot. } \alpha} + \frac{\text{cot. } \alpha}{\text{cot. } \beta} - 2 \text{cos. } \gamma}}$$

Z. B. Es sey $A'B = 3015$; $\alpha = 85^\circ\ 58'\ 6''$; $\beta = 86^\circ\ 6'\ 55''$; $\gamma = 49^\circ\ 34'$, und EC soll gesuchet werden.

$$\log.\cot.\alpha = 8,8480796$$

$$\log.\cot.\beta = 8,8319035$$

$$\log.\frac{\cot.\alpha}{\cot.\beta} = 0,0161761 \quad = \log.1,03795$$

$$\log.\frac{\cot.\beta}{\cot.\alpha} = 0,9838239 - 1 = \log.0,96343$$

$$2,00138$$

$$2\cos.\gamma = 1,2971256$$

$$0,70425$$

$$\log.\cot.\alpha\cot.\beta = 1,6799821 - 4$$

$$- 0,70425$$

$$1,8322553 - 4 \quad :2$$

$$0,9161276 - 2$$

$$\log.A'B = 3,4792873$$

$$\log.EC = 2,3954149; \text{ also}$$

$$EC = 248,55.$$

§. 69.

Fallen noch über dieß die zwey vertikalen Winkel α, β in eine und dieselbe vertikale Ebene, oder ist $\gamma = 0$, so wird

$$P = \text{tang.}\,\alpha^2 + \text{tang.}\,\beta^2 - 2\,\text{tang.}\,\alpha\ \text{tang.}\,\beta,$$

und

$$\sqrt{P} = \text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\alpha; \text{ folglich}$$

$$EC = A'B \sqrt{\frac{1}{P}} = \frac{A'B}{\text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\alpha}$$

Allein im gegenwärtigen Falle sollen die Winkel nicht mehr aus E, sondern aus A und B gemessen werden. Man setze daher, zum Unterschiede, den aus A gemessenen Winkel $EAC = a$, und den aus B gemessenen $EBC = b$, so wird $\text{tang.}\,\alpha = \text{cot.}\,a$, und $\text{tang.}\,\beta = \text{cot.}\,b$; also

$$EC = \frac{A'B}{\text{cot.}\,b - \text{cot.}\,a}.$$

§. 70.

Fällt endlich der Punkt A mit C zusammen, und wird $a = R$, folglich $\text{cot.}\,a = 0$, so erhält man

$$EC = \frac{A'B}{\text{cot.}\,b} = A'B\ \text{tang.}\,b.$$

§. 71.

Man darf sicher behaupten, daß die (§. 67.) gefundene Gleichung fast alle bey Höhenmessungen vorkommende Fälle enthält. Ich habe deren drey aus selber ab=

abgeleitet; der wißbegierige junge Leser mag mit Ableitung noch eines oder des andern Falles nun selbst seine Kräfte prüfen.

§. 72.

Es ist aber die gefundene Höhe eines Ortes, z. B. einer Bergspitze noch nicht das, was der Landmesser eigentlich suchet. Diese sucht er nur darum vorläufig, um dann auch die horizontale Entfernung desselben Ortes von einem gegebenen bestimmen zu können. Und zu dieser Absicht dienen ihm die (§. 67.) gefundenen Formeln

$$A'C = ED \text{ tang. } \alpha, \text{ und}$$
$$BC = (AA' + ED) \text{ tang. } \beta.$$

Anwendung auf die Berechnung des Inhaltes geradliniger Figuren.

§. 73.

Aufgabe. Es sind (Fig. 12.) in dem Dreyecke ABC die Seite BC, und die derselben anliegenden Winkel B und C gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man fälle aus B das Perpendikel BD $= p$, so ist des Dreyeckes Inhalt $S = \frac{1}{2} b p$. Es ist aber

$$p = a \sin. C, \text{ und } b = \frac{a \sin. B}{\sin. (B + C)}; \text{ also}$$

$$S = \frac{a^2 \sin. B \sin. C}{2 \sin. (B + C)} = \frac{a^2}{2(\cot. B + \cot. C)}.$$

Z. B. Es sey $a = 246,6$; $B = 94° \; 43'$; $C = 44° \; 50'$.

$$\cot. C = 1,00583$$
$$- \cot. B = 0,08250$$
$$0,92333 \quad \times 2$$
$$\log. 1,84666 = 0,2663869$$
$$2 \log. a = 4,7839862$$
$$4,5175993$$
$$= \log. 32930,5;$$
$$S = 32930,5.$$

§. 74.

Setzt man $A = R$, so ist auch $B + C = R$, und $\sin. (B + C) = 1$; also

$$S = \frac{a^2 \sin. B \sin. C}{2} = \frac{a^2 \sin. B \cos. B}{2}$$

$= \frac{a^2 \sin. 2B}{4}$. Eben so, wenn $B = R$, wird

$S = \frac{a^2 \operatorname{tang}. C}{2}$, und wenn $C = R$,

$$S = \frac{a^2 \operatorname{tang}. B}{2}.$$

§. 75.

Aufgabe. Es sind die Winkel A, C, und die Seite BC gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Es war (§. 73.) $S = \frac{1}{2}bp$. Nun ist wieder $p = a \sin. C$, und

$$b = \frac{a \sin.(A + C)}{\sin. A}; \text{ also}$$

$$S = \frac{a^2 \sin. C \sin.(A + C)}{2 \sin. A}.$$

Z. B. Es sey $a = 246,6$; $A = 40° 27$; $C = 44° 50'$.

$$\log. \sin. A = 9,8121003$$
$$\log. 2 = 0,3010300$$
$$10,1131303$$
$$-10$$

$$2 \log. a = 4,7839862$$
$$\log. \sin. C = 9,8482180$$
$$\log. \sin.(A + C) = 9,9985268$$
$$24,6307310 - 20$$
$$10,1131303 - 10$$
$$4,5176007 = \log. 32930,6$$
$$S = 32930,6$$

§. 76.

§. 76.

Aufgabe. Es sind die Seiten AB, BC, und der eingeschlossene Winkel B gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man fälle aus C auf BA das Perpendikel CE = p, so ist $S = \frac{1}{2}cp$. Nun ist p = a sin. B; also

$$S = \frac{ac \sin. B}{2}.$$

Z. B. Es sey a = 246,6; c = 268; B = 94° 43′.

$$\begin{aligned} \log. a &= 2{,}3919931 \\ \log. c &= 2{,}4281348 \\ \log. \sin. B &= 9{,}9985268 \\ \hline &\ 14{,}8186547 - 10 \\ \log. 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline &\ 4{,}5176247 = \log. 32932{,}4; \end{aligned}$$

$$S = 32932{,}4.$$

§. 77.

Für B = R wird $S = \frac{ac}{2}$. In den beyden andern Fällen bleibt die Gestalt der Formel ungeändert.

§. 78.

Aufgabe. Es sind die Seiten AB, BC, und der von selben nicht eingeschlossene Winkel A gegeben: den Inhalt zu finden.

Auf-

Auflösung. Es war (§. 76.) $S = \frac{1}{2} cp$. Nun ist $p = b \sin. A$, und

$b = c \cos. A \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin. A^2}$ (§. 60.); also

$S = \frac{1}{2} c^2 \cos. A \sin. A \pm \frac{1}{2} c \sin. A \sqrt{a^2 - c^2 \sin. A^2}$

$= \frac{1}{4} c^2 \sin. 2A \pm \frac{1}{2} c \sin. A \sqrt{(a + c \sin. A)(a - c \sin. A)}$.

Z. B. Es sey $a = 246,6$; $c = 268$; $A = 40° 27'$.

log. sin. A = 9,8121003
log. c = 2,4281348
12,2402351 − 10 = log. 173,874

a = 246,6   log. (a + c sin. A) = 2,6237391
c sin. A = 173,874   log. (a − c sin. A) = 1,8616897

a + c sin. A = 420,474   4,4854288
: 2
a − c sin. A = 72,726   2,2427144
2,2402351

2 log. c = 4,8562696   4,4829495
log. sin. 2A = 9,9944992   − 0,3010300

14,8507688   log. 15202,6 = 4,1819195
log. 4 = 0,6020600

4,2487088 = log. 17730

S = 32932,6.

§. 79.

§. 79.

Für $A = R$ wird $S = \frac{1}{2} c \sqrt{(a+c)(a-c)}$.

§. 80.

Aufgabe. Es sind die Seiten AB, AC, BC gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Es war (§. 76.) $S = \frac{1}{2}$ ac sin. B. Nun ist (§. 59.)

$$\sin. B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2c^2}}$$

also

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{S(S-2a)(S-2b)(S-2c)},$$ wenn

$S = a + b + c$ gesetzt wird.

Z. B. Es sey $a = 246,6$; $b = 378,8$; $c = 268$.

$a = 246,6$	$2a = 493,2$
$b = 378,8$	$2b = 757,6$
$c = 268$	$2c = 536,0$
$S = 893,4$	$\log. S = 2,9510459$
$S - 2a = 400,2$	$\log. (S - 2a) = 2,6022771$
$S - 2b = 135,8$	$\log. (S - 2b) = 2,1328998$
$S - 2c = 357,4$	$\log. (S - 2c) = 2,5531545$
	$10,2393773 : 2$
	$5,1196886$
	$\log. 4 = 0,6020600$
	$\log. 32932,7 = 4,5176286$;
	$S = 32932,7$.

§. 81.

§. 81.

Aufgabe. Es sind (Fig. 13.) in dem Vierecke ABCD die beyden Diagonalen AC, BD, und der Winkel AEB, welchen sie einschließen, gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man bezeichne AC mit D, BD mit d, BE mit υ, AEB mit α, DE mit $d - \upsilon$, so ist das aus B gefällte Perpendikel $BG = \upsilon \sin. \alpha$, und das aus D gefällte $DF = (d - \upsilon) \sin. \alpha$; also

$$S = \tfrac{1}{2} D (\upsilon \sin. \alpha + (d - \upsilon) \sin. \alpha) = \tfrac{1}{2} Dd \sin. \alpha.$$

Z. B. Es sey $D = 456,7$; $d = 343,2$; $\alpha = 106° 6'$.

$$\begin{aligned} \log. D &= 2,6596310 \\ \log. d &= 2,5355473 \\ \log. \sin. \alpha &= 9,9826236 \\ \hline &\quad 15,1778019 - 10 \\ \log. 2 &= 0,3010300 \\ \hline &\quad 4,8767719 = \log. 75296; \\ S &= 75296. \end{aligned}$$

§. 82.

Aufgabe. Es sind (Fig. 14.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, AD, und die Winkel BAC, DAC, ADC gegeben: man soll desselben Inhalt finden.

Auflösung. Man fälle aus B und D auf die, ihrer Lage nach gegebene Diagonale AC die Perpendikel BF, DE, so ist $S = \frac{1}{2} AC (BF + DE)$. Nun ist, wenn man die gegebenen Seiten AB, AD mit a, d, und die gegebenen Winkel BAC, DAC mit α, β, und ADC mit D bezeichnet,

$$AC = \frac{d \sin. D}{\sin. (\beta + D)}; \; DE = d \sin \beta, \text{ und } BF = a \sin. \alpha;$$

also

$$S = \frac{d \sin. D}{2 \sin. (\beta + D)} (a \sin. \alpha + d \sin. \beta).$$

Z. B. Es sey $a = 274,2$; $d = 273$; $\alpha = 72^\circ 46'$; $\beta = 40^\circ 24'$; $D = 87^\circ$.

$$\log. \sin. \beta = 9,8116554$$
$$\log. d = 2,4361626$$

$$\log. 176,936 = 12,2478180 - 10$$

$$\log. \sin. \alpha = 9,9800516$$
$$\log. a = 2,4380675$$

$$\log. 261,890 = 12,4181191 - 10$$
$$176,936$$

$$\log. 438,826 = 2,6422923$$
$$\log. d = 2,4361626$$
$$\log. \sin. D = 9,9994044$$

$$15,0778593 - 10$$

log.

$$\log.\ \sin.\ (B + D) = 9,9000473$$
$$\log.\ 2 = 0,3010300$$
$$10,2010772 - 10$$
$$15,0778593 - 10$$
$$4,8767821 = \log.\ 75297,7$$
$$S = 75297,7$$

§. 83.

Aufgabe. Es sind (Fig. 15.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, AD, und die Winkel B, C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man ziehe AG mit DC, GE mit AD parallel, und BF auf CD senkrecht, so ist

$S = \frac{1}{2}(AG\,(Bf + 2Ff) + EC \times Ff)$. Nun ist

$AG = \frac{a\ \sin.\ B}{\sin.\ C}$; $Bf = a\ \sin.\ (B + C)$;

$Ff = d\ \sin.\ D$; $EC = \frac{d\ \sin.\ (C + D)}{\sin.\ C}$; also

$$S = \frac{a\ \sin.\ B}{2\ \sin.\ C}\,(a\ \sin.\ (B + C) + 2\,d\ \sin.\ D)$$
$$+ \frac{d^2\ \sin.\ D\ \sin.\ (C + D)}{2\ \sin.\ C}.$$

Z. B. Es sey $a = 274,2$; $d = 273$; $D = 87°$; $C = 97°\ 35'\frac{1}{2}$; $B = 62°\ 14'\frac{1}{2}$.

$$\log.\ 2 = 0,3010300$$
$$\log.\ \sin.\ C = 9,9961765$$
$$10,2972065 - 10$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{fin.}\ (B + C) &= 9{,}5375070 \\
\log.\ \text{fin.}\ B &= 9{,}9469039 \\
2\ \log.\ a &= 4{,}8761350 \\
\hline
&\quad 24{,}3605459 - 20 \\
&\quad 10{,}2972065 - 10 \\
\hline
&\quad 4{,}0633394 = \log.\ 11570{,}1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{fin.}\ D &= 9{,}9994044 \\
\log.\ \text{fin.}\ B &= 9{,}9469039 \\
\log.\ a &= 2{,}4380675 \\
\log.\ d &= 2{,}4361626 \\
\log.\ 2 &= 0{,}3010300 \\
\hline
&\quad 25{,}1215684 - 20 \\
&\quad 10{,}2972065 - 10 \\
\hline
&\quad 4{,}8243619 = \log.\ 66736{,}4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\ \log.\ d &= 4{,}8723252 \\
\log.\ \text{fin.}\ (C + D) &= 8{,}9033820 \\
\log.\ \text{fin.}\ D &= 9{,}9994044 \\
\hline
&\quad 23{,}7751116 - 20 \\
&\quad 10{,}2972065 - 10 \\
\hline
&\quad 3{,}4779051 = \log.\ 3005{,}41
\end{aligned}$$

$$S = 11570{,}1 + 66736{,}4 - 3005{,}41 = 75301{,}09.$$

§. 84.

Ist AB mit CD parallel, so wird $B + C = 2R$; folglich $\sin. B = \sin. C$, und $\sin. (B + C) = 0$; also ist für eine Trapez

$$S = d \sin. D \left(a + \frac{d \sin. (C + D)}{2 \sin. C}\right), \text{ und}$$

$S = a d \sin. D$, wenn auch $C + D = 2R$, oder aus der Trapez ein Parallelogram geworden ist.

§. 85.

Aufgabe. Es sind (Fig. 16.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, CD, und die Winkel B, C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man fälle aus A und D die Perpendikel AF, DE, und wieder aus A das Perpendikel AG, so ist

$$S = \tfrac{1}{2}(DE \times EC + AF \times BF + AG(DE + AF)).$$

Nun ist $DE = c \sin. C$; $AF = a \sin. B$; folglich (§. 74.)

$$S = \tfrac{1}{4}(c^2 \sin. 2C + a^2 \sin. 2B + 2AG(c \sin. C + a \sin. B)).$$

Da ferner $DG = c \sin. C - a \sin. B$, und $DAG = 2R - (C + D)$, so wird

$$AG = -(c \sin. C - a \sin. B) \cot. (C + D); \text{ also}$$

$$S = \tfrac{1}{4}(c^2 \sin. 2C + a^2 \sin. 2B - 2 \cot. (C + D) (c^2 \sin. C^2 - a^2 \sin. B^2)).$$

Z. B. Es sey $a = 274,2$; $c = 222,7$; $B = 62^\circ\ 14'\frac{1}{2}$; $C = 97^\circ\ 35'\frac{1}{2}$; $D = 87^\circ$.

log. sin. 2 C = 9,4181495	log. sin. 2 B = 9,9160805
2 log. c = 4,6955416	2 log. a = 4,8761350
14,1136911	14,7922155
− 10	− 10
log. 4 = 0,6020600	log. 4 = 0,6020600
log. 3248,1 = 3,5116311	log. 15493,6 = 4,1901555
$\frac{c^2 \sin. 2C}{4} = - 3248,1$	$\frac{a^2 \sin. 2B}{4} = + 15493,6$
l.cot. (C + D) = 11,0952212	l.cot. (C + D) = 11,0952212
2 log. c = 4,6955416	2 log. a = 4,8761350
2 log. sin. C = 19,9923530	2 log. sin. B = 19,8938078
35,7831164	35,8651646
− 30	− 30
log. 2 = 0,3010300	log. 2 = 0,3010300
log. 303449 = 5,4820858	log. 366551 = 5,5641340
$\frac{1}{2}$ cot. (C + D) c^2 sin. C^2	$\frac{1}{2}$ cot. (C + D) a^2 sin. B
= − 303449	= + 366551
− 3248,1	+ 15493,6
− 306697,1	+ 382044,6
	− 306697,1
	S = 75347,5

§. 86.

§. 86.

Offenbar ist in diesem Zahlenbeyspiele der Inhalt zu groß ausgefallen. Es müssen nämlich die Seiten und Winkel genauest gemessen worden seyn, wenn daraus der Inhalt richtig gefunden werden soll; verändert man eine Seite nur um einen oder den andern Zoll, so verändert sich der Inhalt schon um mehrere Quadratfuß. Diese Formel ist daher zum Gebrauche nicht wohl anzurathen.

§. 87.

Ist AB mit CD parallel, also ABCD eine Trapez, so wird $\sin. 2C = -\sin. 2B$; also

$$S = \frac{c^2 - a^2}{4} (\sin. 2C - 2 \cot. (C + D) \sin. C^2).$$

§. 88.

Aufgabe. Es sind (Fig. 15.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, AD, CD, und die Winkel B, C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man ziehe AG mit CD parallel, und BF auf CD senkrecht, so ist

$$S = \frac{Bf \times AG}{2} + Ff \frac{AG + CD}{2} = \tfrac{1}{2}(AG(Bf + Ff) + CD \times Ff).$$

Setzt man an die Stellen dieser Linien die schon (§. 83.) gefundenen Werthe, oder ihre bisher gebrauchten Bezeichnungen, so wird

$$S = \frac{a \sin. B}{2 \sin. C} (a \sin. (B + C) + d \sin. D) + \tfrac{1}{2} cd \sin. D.$$

Z. B.

Z. B. Es sey $a = 274$; $c = 222,6$; $d = 273$; $B = 62° \, 14'\tfrac{1}{2}$; $C = 97° \, 35'\tfrac{1}{2}$; $D = 87°$.

Auf die Weise, wie (§. 83.) gezeigt worden, erhält man

$$\frac{a \sin. B}{2 \sin. C} (a \sin. (B + C) + d \sin. D) = 11570,1 + 33368,2 = 44938,3.$$

Die fernere Rechnung kömmt so zu stehen:

$$\begin{aligned} \log. \sin. D &= 9,9994044 \\ \log. d &= 2,4361636 \\ \log. c &= 2,3477708 \\ \hline & 14,7833388 - 10 \\ \log. 2 &= 0,3010300 \\ \hline & 4,4823088 = \log. 30360,5 \end{aligned}$$

$$S = 44938,2 + 30360,5 = 75298,7.$$

§. 89.

Ist $B + C = 2R$, oder AB mit CD parallel, so wird $\sin. (B + C) = 0$, $\sin. B = \sin. C$; also

$$S = \tfrac{1}{2} d \sin. D \, (a + c).$$

§. 90.

Aufgabe. Es sind (Fig. 17.) in dem Vierecke ABCD die Seiten BC, AD, CD, und die Winkel C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auf-

Auflösung. Man fälle aus A auf CD das Perpendikel AE, auf dieses aus B das Perpendikel BF, und wieder auf dieses aus C das Perpendikel CG, so ist

$$S = \frac{DE \times AE}{2} + \frac{AF \times BF}{2} + GC\,\frac{CE \times BF}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(DE \times AE + BF \times AE + EC \times GC).$$

Nun ist $DE = d \cos. D$; $AE = d \sin. D$; $GB = -b \cos. C$; $GC = b \sin. C$; $EC = c - d \cos. D$; $BF = c - d \cos. D - b \cos. C$; also

$$S = \tfrac{1}{2}\,(d^2 \cos. D \sin. D. + d \sin. D\,(c - d \cos. D - b \cos. C) + b \sin. C\,(c - d \cos. D))$$

$$= \tfrac{1}{2} c\,(d \sin. D + b \sin. C) - \tfrac{1}{2} b d \sin. (C + D).$$

Z. B. Es sey $b = 370{,}4$; $c = 222{,}7$; $d = 273$; $C = 97^\circ\, 35'\tfrac{1}{2}$; $D = 87^\circ$.

log. sin. C = 9,9961765	log. sin. D = 9,9994044
log. b = 2,5686973	log. c = 2,3477708
log. c = 2,3477708	log. d = 2,4361636
14,9126346	14,7833388
— 10	— 10
0,3010300	0,3010300
lg. 40888,8 = 4,6116046	lg. 30360,5 = 4,4823088

log.

$$\log.\ \sin.\ (C + D) = 8{,}9033820$$
$$\log.\ b = 2{,}5686973$$
$$\log.\ d = 2{,}4361613$$

$$13{,}9082406 - 10$$
$$0{,}3010300$$

$$3{,}6072106 = \log.\ 4047{,}72$$

$$S = 40888{,}8 + 30360{,}5 + 4047{,}72$$
$$= 75297{,}02.$$

§. 91.

Läuft AD mit BC parallel, so wird aus den nun schon bekannten Gründen

$$S = \tfrac{1}{2}\, c\ \sin.\ C\ (b + d).$$

§. 92.

Aufgabe. Es sind (Fig. 18.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AD, BC, CD, und die Winkel B, C, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man ziehe DG mit BC parallel, und fälle aus A das Perpendikel AF, so ist

$$S = Ff\ \frac{GD + BC}{2} + \frac{GD \times Af}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(GD\,(Ff + Af) + BC \times Ff).$$

Nun

Nun ist $Af = -d \sin.(C+D)$; $Ff = c \sin. C$;

$$GD = \frac{-d \sin.(B+C+D)}{\sin. B}; \text{ also}$$

$$S = \frac{-d \sin.(B+C+D)}{2 \sin. B}(c \sin. C - d \sin.(C+D))$$
$$+ \tfrac{1}{2} bc \sin. C.$$

Z. B. Es sey $b = 370{,}4$; $c = 222{,}7$; $d = 273$; $B = 62^\circ\ 14'\tfrac{1}{2}$; $C = 97^\circ\ 35'\tfrac{1}{2}$; $D = 87^\circ$.

$$\log. \sin. B = 9{,}9469034$$
$$\log. 2 = \underline{0{,}3010300}$$
$$10{,}2479334 - 10$$

$$\log. \sin.(B+C+D) = 9{,}9634877$$
$$\log. \sin. C = 9{,}9961765$$
$$\log. c = 2{,}3477708$$
$$\log. d = \underline{2{,}4361613}$$
$$24{,}7435963 - 20$$
$$\underline{10{,}2479334} - 10$$
$$4{,}4956629 = \lg. 31308{,}52$$

$$\log. \sin.(B+C+D) = 9{,}9634877$$
$$\log. \sin.(C+D) = 8{,}9033820$$
$$2 \log. d = \underline{4{,}8723226}$$
$$23{,}7391923 - 20$$
$$\underline{10{,}2479334} - 10$$
$$\log. 3099{,}26 = 3{,}4912589$$

log.

$$\log.\ \sin.\ C = 9{,}9961765$$
$$\log.\ b = 2{,}5686973$$
$$\log.\ c = 2{,}3477708$$
$$14{,}9126446 - 10$$
$$\log.\ 2 = 0{,}3010300$$
$$\log.\ 40888{,}92 = 4{,}6116146$$

$$S = 31308{,}52 + 40888{,}92 + 3099{,}26 = 75296{,}7.$$

§. 93.

Aufgabe. Es sind (Fig. 14.) in dem Vierecke ABCD die Seiten AB, BC, CD, AD, und die Winkel B, D gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale AC, so ist $ABC = \frac{1}{2}\, ab\ \sin.\ B$, und $ACD = \frac{1}{2}\, cd\ \sin.\ D$; also

$$S = \tfrac{1}{2}(ab\ \sin.\ B + cd\ \sin.\ D).$$

Z. B. Es sey $a = 274{,}2$; $b = 370{,}4$; $c = 222{,}7$; $d = 273$; $B = 62^\circ\ 14'\frac{1}{2}$; $D = 87^\circ$.

$\log.\ a = 2{,}4380675$	$\log.\ c = 2{,}3477708$
$\log.\ b = 2{,}5686973$	$\log.\ d = 2{,}4361626$
$\log.\ \sin.\ B = 9{,}9469039$	$\log.\ \sin.\ D = 9{,}9994044$
$4{,}9536687$	$4{,}7833378$
$\log.\ 2 = 0{,}3010300$	$\log.\ 2. = 0{,}3010300$
$l.\ 44940{,}57 = 4{,}6526387$	$l.\ 30360{,}34 = 4{,}4823078$

$$S = 44940{,}57 + 30360{,}34 = 75300{,}91.$$

§. 94.

§. 94.

Alle Vielecke lassen sich in Drey= und Vierecke, als ihre Bestandtheile, auflösen. Daher haben wir uns, durch die vorausgeschickte Inhaltsberechnung dieser einfachen Figuren, zur Berechnung der zusammengesetzten Figuren, oder der Vielecke schon vorläufig den Weg gebahnet. Der Inhalt eines Vieleckes kann auf dreyfache Weise gefunden werden, durch Zerlegung in Dreyecke, Trapezoiden und Trapezen. Denn indem man von jedem Dreyecke, oder Vierecke insbesondere den Inhalt suchet, und die gefundenen addirt, erhält man den Inhalt des Vieleckes, der gesuchet werden sollte. So kurz diese Lehre ist, und so leicht die Anwendung derselben scheinen mag, glaube ich dennoch, daß es noch immer der Mühe lohne, dieselbe etwas näher zu beleuchten.

§. 95.

Aufgabe. In dem Vielecke AB . . . . FG (Fig. 19.) sind alle Seiten und Winkel gegeben: den Inhalt zu finden.

1. **Auflösung.** Man zerlege die gegebene Figur auf schickliche Weise in Dreyecke. — Da nun in dem Dreyecke ABG der Winkel bey A, und die ihn einschließenden Seiten AB, AG bekannt sind, so ist desselben Inhalt (§. 76.)

$$S = \tfrac{1}{2} AB \times AG \times \sin. BAG.$$

Es ist aber auch (§. 73.)

$$S = \frac{\tfrac{1}{2} AG^2}{\cot. AGB + \cot. BAG}; \text{ also}$$

$$\cot. AGB = \frac{\tfrac{1}{2} AG^2}{S} - \cot. BAG.$$

Aus

Aus dem gefundenen Winkel AGB ergiebt sich auch der Winkel ABG, und aus diesem und dem gegebenen ABC der Winkel GBC. Nun ist wieder

$$S = \frac{1}{2} AG \times BG \times \sin. AGB; \text{ also}$$

$$BG = \frac{2S}{AG \times \sin. AGB}.$$

Demnach sind in dem Dreyecke BCG nebst der Seite BC noch die Seite BG, und der Winkel CBG bekannt, und es läßt sich auf die nämliche Weise sowohl der Inhalt dieses Dreyeckes, als die Seite CG, und der Winkel CGF des folgenden dritten Dreyeckes finden. Setzt man dieses Verfahren bis an das andere Ende der Figur fort, so ergiebt sich allmählig der Inhalt der ganzen Figur.

2. Auflösung. Man zerlege die Figur in Trapezoiden. — Da in der Trapezoid ABCG die Winkel BAG, ABC, und die Seiten AG, AB, BC bekannt sind, so läßt sich daraus der Inhalt finden. Denn es sey $GAB = C$; $ABC = D$; $AG = b$; $AB = c$; $BC = d$, so ist (§. 90.)

$$S = \frac{1}{2} c (d \sin. D + b \sin. C) - \frac{1}{2} bd \sin. (C + D).$$

Es ist aber auch, den Winkel $CGA = B$ angenommen (§. 92.)

$$S = \frac{-d \sin. (B + C + D)}{2 \sin. B} (c \sin. C - d \sin. (C + D)) + \frac{1}{2} bc \sin. C, \text{ und daher}$$

$$\cot. B = \frac{(2S - bc \sin. C) : d^2 \sin. (C + D)^2}{1 - c \sin. C : d \sin. (C + D)} - \cot. (C + D).$$

Aus

Aus dem so gefundenen Winkel CGA, und dem gegebenen AGF, ergiebt sich auch der Winkel CGF in der Trapezoid CEFG.

Nimmt man auch die Seite CG = a an, so ist (§. 93.)

$$S = \frac{1}{2}(ab \sin. B + cd \sin. D),$$ und daher

$$a = \frac{2S - cd \sin. D}{b \sin. B}.$$

Da nun in dieser Trapezoid die Winkel CGF, GFE, und die Seiten CG, GF, FE bekannt sind, so läßt sich auf ähnliche Weise derselben Inhalt finden. Bleibt zuletzt ein Dreyeck übrig, so wird es nach (§. 76.) berechnet.

3. Auflösung. Man zerlege (Fig. 20.) die Figur AB....FG, indem man durch alle Eckpunkte mit einer gegebenen, oder willkührlich angenommenen MN, parallele Linien zieht, in Trapezen, und zwey an beyden Enden befindliche Dreyecke. — Da in dem Dreyecke AGg die Seite AG, und die ihr anliegenden Winkel bekannt sind, so ist (§. 73.)

$$S = \frac{\frac{1}{2} AG^2}{\cot. gAG + \cot. AGg}.$$

Es ist aber auch

$$S = \frac{1}{2}(AG \times Ag \times \sin. GAg),$$ und wieder

$$S = \frac{1}{2}(AG \times Gg \times \sin. AGg);$$ also

$$Ag = \frac{2S}{AG \times \sin. GAg}.$$

$$Gg = \frac{2S}{AG \times \sin. AGg}.$$

Weil

Weil nun in dem Dreyeck AGg alle Seiten und Winkel bekannt sind, so lassen sich nebst den beyden Seiten Bg, Gg auch alle Winkel der Trapez BbGg daraus ableiten, und daher ist derselben Inhalt (§. 84.)

$$S = Bg \sin. gBb \left(Gg + \frac{Bg \times \sin.(gBb + BbG)}{2 \sin. BbG}\right).$$

Es ist aber auch

$$S = \tfrac{1}{2}(Bb + Gg)\, Bg \times \sin. gBb, \text{ und wieder}$$

$$S = \tfrac{1}{2}(Bb + Gg)\, Gb \times \sin. GbB; \text{ also}$$

$$Bb = \frac{2S}{Bg \times \sin. gBb} - Gg, \text{ und}$$

$$Gb = \frac{2S}{(Bb + Gg) \times \sin. GbB}.$$

Aus den nun gefundenen Seiten und Winkeln der Trapez BbGg ergeben sich durch leichte Schlüsse die zur Berechnung des Inhaltes der folgenden Trapez bBCc erfoderlichen Seiten und Winkel. Suchet man dann auch die Seiten Cc, bc, so sind wir im Stande aus diesen, und den gleichfalls gefundenen nöthigen Winkeln den Inhalt der dritten Trapez zu finden. — Nach dieser kurzen Vorschrift lassen sich alle folgenden Trapezen berechnen, und das Dreyeck EFf am Ende, wie das Dreyeck AGg am Anfange.

§. 96.

Ich habe nun eine und dieselbe Aufgabe auf dreyfache Weise trigonometrisch aufgelöset. Die letztere ist

einfacher und weniger beschwerlich, als die zweyte, und hat vor dieser, und vor der ersten den beträchtlichen Vorzug, daß sie auch die Flächentheilung, im Falle, wo die Theilungslinien alle parallel seyn sollen, gar sehr erleichtert. Zwar behauptet eben diesen Vorzug auch die gewöhnliche Methode, welche darin besteht, daß man durch alle Eckpunkte der Figur Parallelen zieht, sie und ihre senkrechten Entfernungen von einander mißt, und daraus den Flächeneinhalt berechnet; allein wer kennt nicht auch ihre wenige Sicherheit und Richtigkeit in Vergleichung mit der trigonometrischen? wer weiß nicht, welchen nachtheiligen Einfluß nicht nur die aus der Messung der Winkel und Linien auf dem Felde, sondern, und vornehmlich die aus der Zeichnung, und der Messung der Linien auf dem Papier sich ergebenden Fehler, auf sie haben? — Und eben darum verliert auch die vorzügliche Leichtigkeit dieser Methode gar viel von ihrem Werthe.

§. 97.

Ich habe diese dreyfache Auflösung durch kein Zahlenbeyspiel erläutert; theils um Raum für noch andere wichtige Wahrheiten zu gewinnen; theils, und vornehmlich, um den jungen Leser, wenn er genug wißbegierig ist, in die Nothwendigkeit zu versetzen sich durch trigonometrische Zahlenrechnungen, allein und ohne fremde Beyhilfe, durchzuarbeiten. Zu diesem Ende setze ich noch die Maaße her, welche in beyden letztern Figuren die innern Winkel und die Linien gemessen haben:

Die Seite	AB = 361′	der Winkel	A = 113°	23′
	BC = 383		B = 84	44
	CD = 308		C = 270	31
	DE = 400		D = 105	55
	EF = 599		E = 91	37
	FG = 565,5		F = 112	37
	GA = 531		G = 121	13

Anwendung auf die Theilung geradliniger Figuren.

§. 98.

Die Theilung geradliniger Figuren gehört unter die vornehmsten Operationen des Feldmessers auf dem Papier, wie auf dem Felde selbst, und besteht darin, daß ein vorgegebenes Stück Land in zwey oder mehrere, gleiche oder ungleiche Theile, gewissen vorgeschriebenen Bedingungen gemäß, getheilt wird. Wenn die Theile ungleich groß seyn sollen, muß ihr Verhältniß zu einander entweder vorgeschrieben, oder aus der Natur der Sache gefolgert worden seyn. Die Bedingungen, welche bey der Theilung eines Stückes Land zum Grunde liegen, beziehen sich gewöhnlich

1) auf die Seite, an welcher die Theilung anfangen, oder enden soll;

2) auf die Richtung der Theilungslinien, und

3) auf die Gestalt der Theile selbst.

§. 99.

Man kann an jeder Seite einer Figur einen oder mehrere Theile davon abschneiden; daher muß nothwendig die Seite, wo man mit der Theilung anfangen soll, vorläufig bestimmt seyn worden. In Ansehung der Theilungslinien wird gefordert, daß sie nicht gebrochen, sondern gerade seyen, und, so viel möglich ist, gleichlaufend, zuweilen auch, daß sie sich alle in einem bestimmten Punkte schneiden, oder an eine vorgeschriebene Seite stossen. Der Gestalt nach soll jedes abzuschneidende Stück so wenig, als möglich, irregulär seyn, aber auch, wo es zum bessern Gebrauche nützlich oder nothwendig ist, eine verhältnißmäßige Länge und Breite haben.

§. 100.

Aufgabe. In dem Vierecke ABEF (Fig. 21.) sind die Seite AB, und die Winkel A, B gegeben: man soll von demselben ein anderes ABCD, dessen Inhalt gegeben ist, abschneiden, so, daß die Theilungslinie DC mit AF einen gegebenen Winkel D mache.

Auflösung. Da die Winkel A, B, D bekannt sind so ist es eben darum auch der Winkel C. Daher ist, unter den bisher angenommenen Bezeichnungen der Seiten, der Winkel, und des Inhalts (§. 83)

$$S = \frac{a \sin. B}{2 \sin. C} (a \sin. (B + C) + 2 d \sin. D)$$

$$+ \frac{d^2 \sin. D \sin. (C + D)}{2 \sin. C}.$$

Weil in dieser Gleichung alle Größen, $AD = d$ ausgenommen, bekannt sind, so läßt sich dieses d finden, und damit die Theilungslinie DC bestimmen. Zu diesem Ende gebe man der Gleichung folgende Gestalt:

$$d^2 + d \frac{2\,a\,\sin.B}{\sin.(C+D)} = \frac{2\,S\,\sin.C - a^2\,\sin.B\,\sin.(B+C)}{\sin.D\;\sin.(C+D)};$$

oder wenn man $B + C = 4R - A - D = \phi - D$; $C = 4R - A - B - D = \lambda - D$, und $C + D = 4R - A - B = \psi$ setzt, diese:

$$d = +\sqrt{\left(\frac{a\,\sin.B}{\sin.\psi}\right)^2 + \frac{2\,S\,\sin.(\lambda - D) - a^2\,\sin.B\,\sin.(\phi - D)}{\sin.D\;\sin.\psi}}$$

$$- \frac{a\,\sin.B}{\sin.\psi}.$$

Es wird hier vorausgesetzt, daß $\psi < 2R$, folglich $\sin.\psi$ positiv sey; im entgegengesetzten Falle, oder wenn $\psi > 2R$, und daher $\sin.\psi$ negativ ist, erhält man

$$d = -\sqrt{\left(\frac{a\,\sin.B}{\sin.\psi}\right)^2 - \frac{2\,S\,\sin.(\lambda - D) - a^2\,\sin.B\,\sin.(\phi - D)}{\sin.D\;\sin.\psi}}$$

$$+ \frac{a\,\sin.B}{\sin.\psi}.$$

§. 102.

§. 101.

Soll die Theilungslinie DC mit AB parallel seyn, so wird $B + C = \Phi - D = 2R$, also $\sin.(\Phi - D) = 0$, und man erhält

$$d = \pm \sqrt{\left(\frac{a \sin. B}{\sin. \psi}\right)^2 \pm \frac{2 S \sin.(\lambda - D)}{\sin. D \sin. \psi}} \mp \frac{a \sin. B}{\sin. \psi}.$$

§. 102.

Soll auch AD mit BC parallel, und ABCD ein Parallelogram seyn, so wird (§. 100.)

$$2\, a\, d \sin. B = \frac{2 S \sin. C}{\sin. D}; \text{ also}$$

$$d = \frac{S}{a \sin. D}.$$

§. 103.

Soll das abzuschneidende Stück ein Dreyeck seyn, so wird $a = 0$; also

$$d = \sqrt{\frac{2 S \sin.(\lambda - D)}{\sin. D \sin. \psi}} = \sqrt{\frac{2 S \sin. C}{\sin. D \sin. \psi}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 S \sin.(A + D)}{\sin. D \sin. A}} = \sqrt{2 S (\cot. A + \cot. D)}$$

§. 104.

Wird noch überdieß gefordert, daß DC auf der Seite, mit

mit welcher sie den Richtungswinkel D einschließt, senkrecht stehe, so ergiebt sich

$$d = \sqrt{2 S \text{ cot. } A.}$$

§. 105.

Durch dieses Wenige, was bisher gesagt worden, läßt sich jedes geradlinige Vieleck in zwey, und mehrere Theile nach bestimmten Verhältnissen theilen, sofern nur jedesmal die Richtung der Theilungslinien, oder ihr Richtungswinkel bestimmt ist. — Wie nun hier aus dem gegebenen Richtungswinkel der Ort seiner Spitze gesucht wird, so giebt es hinwieder Fälle, wo jener aus diesem gesucht werden muß.

§. 106.

Aufgabe. In dem Vierecke ABEF (Fig. 21.) sind die Winkel A, B, und die Seite AB gegeben: man soll von demselben ein anderes ABCD abschneiden, so daß die Theilungslinie DC durch den in AF gegebenen Punkt D durchgehe.

Auflösung. Es war (§ 100.)

$$d^2 + d \frac{2 a \text{ sin. } B}{\text{sin. } \psi} = \frac{2 S \text{ sin. } (\lambda - D) - a^2 \text{ sin. } B \text{ sin. } (\phi - D)}{\text{sin. } D \text{ sin. } \psi}.$$

Hieraus folgt

$$d^2 \text{ sin. } \psi + 2 a d \text{ sin. } B = \frac{2 S \text{ sin. } \lambda \text{ sin. } (\lambda - D)}{\text{sin. } \lambda \text{ sin. } D}$$

$$- \frac{a^2 \text{ sin. } B \text{ sin. } \phi \text{ sin. } (\phi - D)}{\text{sin. } \phi \text{ sin. } D}$$

$$= 2 S$$

$$= 2S \sin.\lambda (\cot.D - \cot.\lambda) - a^2 \sin.B.\sin.\phi (\cot.D - \cot.\phi)$$

$$= 2S (\cot.D \sin.\lambda - \cos.\lambda) - a^2 \sin.B (\cot.D \sin.\phi - \cos.\phi).$$

Daher ist

$$\cot.D = \frac{d^2 \sin.\psi + 2ad \sin.B - a^2 \sin.B \cos.\phi + 2S \cos.\lambda}{-a^2 \sin.B \sin.\phi + 2S \sin.\lambda}$$

§. 107.

Soll das abzuschneidende Stück ein Dreyeck seyn, so wird $a = o$, und damit

$$\cot.D = \frac{d^2 \sin.\psi + 2S \cos.\lambda}{2S \sin.\lambda} = \frac{d^2 \sin.\psi}{2S \sin.\lambda} + \cot.\lambda.$$

Es ist aber $\psi = \lambda = C + D$; also wird endlich

$$\cot.D = \frac{d^2}{2S} + \cot.(C + D)$$

$$= \frac{d^2}{2S} - \cot.A.$$

§. 108.

Es wird aber die Theilungslinie DC nicht allein durch den Winkel D, sondern auch durch die Seite BC bestimmt. Daher wird diese Aufgabe (§. 106.) auch aufgelöset seyn, wenn man die Seite BC wird gefnnden haben. Nun war (§. 90.)

$$S = \tfrac{1}{2} c (d \sin.D + b \sin.C) - \tfrac{1}{2} b d \sin.(C + D),$$

und

und was dort war C; D; b; c; d
ist hier A; B; d; a; b; also

$$S = \frac{1}{2} a (b \sin. B + d \sin. A) - \frac{1}{2} b d \sin. (A + B),$$

und

$$b = \frac{2S - a d \sin A}{a \sin. B - d \sin. (A + B)}.$$

§. 109.

Soll das abzuschneidende Stück ein Dreyeck seyn, so wird $a = 0$, und $A + B < 2R$; also

$$b = \frac{2S}{d \sin. (A + B)} = \frac{2S}{d \sin. A}.$$

§. 110.

Diese beyden Aufgaben mit ihren Zusätzen enthalten die ganze Lehre von der Theilung geradliniger Figuren. Obschon der Selbstdenker sich von dieser Behauptung leicht selbst überzeugen kann, und also keiner fernern Entwicklung dieser wichtigen Lehre bedürfen möchte, will ich dennoch zum Behufe meiner andern Leser diesen Beweis noch auf mich nehmen, und zeigen, wie die vornehmsten hieher gehörigen Aufgaben trigonometrisch aufgelöset werden können.

§. 111.

Aufgabe. Es ist (Fig. 22.) in dem Vierecke ABEF der Winkel A gegeben: man soll von demselben ein gegebenes Dreyeck S gegen den Scheitel A abschneiden, so

daß

daß die Theilungslinie DC mit AB, einer von des Viereckes Seiten, einen bestimmten Winkel D einschliesse.

Auflösung. Es sey AD = d die Seite des abzuschneidenden Dreyeckes, welche gesucht werden soll, so ist

$$d = \sqrt{2 S (\cot. A + \cot. D)}.$$

Z. B. Es sey $A = 50^\circ$; $D = 60^\circ$; $S = 8925$, und d soll gesucht werden.

$$\begin{aligned} \cot. A &= 0{,}8390996 \\ \cot. D &= 0{,}5773503 \\ \hline & 1{,}4164499 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. 1{,}416 &= 0{,}1510633 \\ \log. S &= 3{,}9506082 \\ \log. 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline & 4{,}4027015 : 2 \\ & 2{,}2013507 = \log. 159 \\ & d = 159. \end{aligned}$$

§. 112.

Sollen mehrere, gleiche oder ungleiche Theile von dem Vierecke ABEF abgeschnitten, oder dieses in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher oder ungleicher Theile getheilt werden, so berechne man aus dem Inhalte des Viereckes, der Zahl, und dem Verhältnisse der Theile die Inhalte derselben, bringe je zwey, je drey, je vier u. s. w.

gegen

gegen den Scheitel abzuschneidende Theile in eine Summe, setze für S diese Summen der Theile, auch für D den jedesmaligen Werth des Richtungswinkels, und wiederhohle die eben gelehrte Rechnung nach der Vorschrift der Formel so oft, als 1 in n der Anzahl der Theile — 1 enthalten ist. Es bedeuten S; 2S; 3S... nS die Summen der gleichen, S; S''; S'''... S^n die Summen der ungleichen Theile, D; D''; D'''... D^n die Richtungswinkel, und endlich d; d''; d'''... d^n die Werthe der Seite, welche mit dem zugehörigen Richtungswinkel den Ort der Theilungslinie bestimmt, so ergeben sich, in so fern die Summen der Theile noch Dreyecke sind, für gleiche Theile die Formeln:

$$d = \sqrt{2S(\cot. A + \cot. D)}$$
$$d'' = \sqrt{4S(\cot. A + \cot. D'')}$$
$$d''' = \sqrt{6S(\cot. A + \cot. D''')} \text{ u. s. w.}$$

für ungleiche aber die Formeln:

$$d = \sqrt{2S(\cot. A + \cot. D)}$$
$$d'' = \sqrt{2S''(\cot. A + \cot. D'')}$$
$$d''' = \sqrt{2S'''(\cot. A + \cot. D''')} \text{ u. s. w.}$$

§. 113.

Weiß mau daher, wie ein gegebenes Stück von einer Figur abgeschnitten werden müsse, so hat auch schon die Theilung dieser Figur in mehrere, gleiche oder ungleiche, Theile keine Beschwerniß mehr auf sich. Aus dieser Ur-

sache werde ich künftig nur zeigen, wie von jeder geradlinigen Figur ein Stück, den jedesmaligen Bedingungen gemäß, müsse abgeschnitten werden, und mich begnügen, zur Theilung einer Figur in mehrere Theile hier diese kurze Anleitung gegeben zu haben.

§. 114.

Sollen die Theilungslinien alle unter sich parallel seyn, so bleibt der Richtungswinkel in allen obigen Formeln unverändert, und immer = D.

§. 115.

Aufgabe. Es ist in dem Vierecke ABEF der Winkel A gegeben: man soll von demselben ein gegebenes Dreyeck S gegen den Scheitel A abschneiden, so daß die Theilungslinie DC die Seite AB in dem bestimmten Punkte D schneide.

Auflösung. Den Bedingungen dieser Aufgabe kann auf doppelte Weise Genügen geschehen; indem man von der Theilungslinie DC entweder den Richtungswinkel D, oder die demselben gegenüber stehende Seite AC suchet. Auf die erste Weise ist (§. 107.)

$$\cot. D = \frac{d^2}{2S} - \cot. A,$$

auf die zweyte, AC = b angenommen, ist (§. 109.)

$$b = \frac{2S}{d \sin. A}.$$

Z. B.

Z. B. Es sey $A = 50^\circ$; $S = 8925$; $d = 159$.

$$\begin{array}{ll} \log. S = 3{,}9506082 & \log. d = 2{,}2013507 \\ \log. 2 = 0{,}3010300 & \log. \sin. A = 9{,}8842540 \\ \hline 4{,}2516382 & 12{,}0856047 \\ & -10 \\ 2{,}0856047 & \\ \hline \end{array}$$

$$2{,}1660335 = \log. 146{,}6$$

$$b = 146{,}6.$$

§. 116.

Aufgabe. Es ist (Fig. 23.) innerhalb des Viereckes ABEF ein Punkt D durch die Linie DA und den Winkel DAC gegeben: man soll ein gegebenes Dreyeck S abschneiden, so daß die Theilungslinie durch den gegebenen Punkt D durchgehe, und AF schneide.

Auflösung. Es sey DC die zu suchende Theilungslinie; $AD = \delta$; $AC = \beta$; $DAC = \text{A}$, so ist (§. 109.)

$$\beta = \frac{2\,S}{\delta \sin. \text{A}}.$$

§. 117.

Aus dieser und der vorigen Aufgabe wird auch begreiflich, wie man verfahren müsse, wenn ein Dreyeck in mehrere, gleiche oder ungleiche Theile soll getheilt werden, und jede Theilungslinie durch einen besondern, innerhalb

nerhalb oder am Umfange des Dreyeckes gegebenen Punkt durchgehen.

§. 118.

Es darf aber, was bisher nur der Einfachheit wegen angenommen worden, das Ganze, wovon ein gegebenes Stück soll abgeschnitten werden, nicht eben ein Dreyeck oder Viereck, sondern kann auch überhaupt ein geradliniges Vieleck seyn; allein, sollen diese Formeln noch können gebraucht werden, so muß das abzuschneidende Stück immer die Gestalt eines Dreyeckes haben.

§. 119.

Aufgabe. Es sind (Fig. 24.) in dem Vierecke ABEF die Winkel A, B, und die Seite AB gegeben: man soll von demselben eine gegebene Trapez S abschneiden, so daß die Theilungslinie DC mit AB parallel sey.

Auflösung. Weil AB mit der Theilungslinie DC parallel seyn soll, und A und B bekannt sind, so sind es eben darum auch C und D; daher ist

$$d = \pm \sqrt{\left(\frac{a \sin. C}{\sin. (C + D)}\right)^2 \pm \frac{2 S \sin. C}{\sin. D \sin. (C + D)}} \mp \frac{a \sin. C}{\sin. (C + D)}$$

Z. B. Es sey $A = 105^\circ\ 26'$; $B = 102^\circ\ 57'$; $a = 274,2$; $S = 75300$.

$$\log. \sin. C = 9,9888113$$
$$\log. a = 2,4380675$$
$$12,4268788 - 10$$

log.

$$\log.\sin.(C+D) = 9{,}6770302 - 10$$

$$2{,}7498486 \times 2$$

$$5{,}4996972 = 316007{,}3$$

$$\log.\sin.C = 9{,}9888113$$

$$\log.S = 4{,}8767950$$

$$\log.2 = 0{,}3010300$$

$$25{,}1666363 - 20$$

$$\log.\sin.(C+D) = 9{,}6770302$$

$$\log.\sin.D = 9{,}9840503$$

$$19{,}6610805 - 20$$

$$5{,}5055558 = \log.320300{,}7$$

$$\log.\frac{a\sin.C}{\sin.(C+D)} = 2{,}7498486 = \log.562{,}1$$

$$316007{,}3$$

$$320300{,}7$$

$$\sqrt{636308} = 797{,}6$$

$$562{,}1$$

$$d = 235{,}5.$$

§. 120.

Aufgabe. Es sind (Fig. 21.) in dem Vierecke ABEF die Winkel A, B, und die Seite AB gegeben: man soll von demseben eine gegebene Trapezoid S abschneiden, so, daß die Theilungslinie DC durch einen in der Seite AF gegebenen Punkt D durchgehe.

Auf=

Auflösung. Weil der Punkt D gegeben ist, ist es eben darum auch AD. Daher ist BC, welche mit dieser die Richtung und Lage der Theilungslinie DC bestimmt (§. 108.), oder

$$b = \frac{2S - ad \sin. A}{a \sin. B - d \sin. (A + B)}.$$

Z. B. Es sey $A = 113^\circ\ 10'$; $B = 62^\circ\ 14'\frac{1}{2}$; $D = 87^\circ$; $a = 274,2$; $d = 273$; $S = 75296,3$.

$$\begin{aligned} \log. \sin. A &= 9,9634877 \\ \log. a &= 2,4380675 \\ \log. d &= 2,4361626 \\ \hline & 14,8377178 - 10 = \log. 68820,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S &= 150592,6 \\ & 68820,5 \\ \hline & 81772,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l. \sin. B &= 9,9469039 \\ \log. a &= 2,4380675 \\ \hline l. 242,6 &= 12,3849714 \\ & - 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} lg. \sin. (A+B) &= 8,9033320 \\ \log. d &= 2,4361626 \\ \hline lg. 21,85 &= 11,3394946 \\ & - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 21,85 \\ \hline & 220,75 \end{aligned}$$

$$\frac{81772,1}{220,75} = 370,4$$

$$b = 370,4.$$

§. 122.

§. 121.

Aufgabe. Man soll von dem Vierecke ABEF eine gegebene Trapezoid S abschneiden, so daß die Theilungslinie DC durch einen innerhalb des Viereckes gegebenen Punkt D durchgehe.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die Linie AD, welche nebst dem Winkel DAB = A' die Lage des Punktes D bestimmt, zugleich das abzuschneidende Stück begränzen solle, ist wieder

$$b = \frac{2S - a'd \sin. A'}{a' \sin. B - d \sin. (A' + B)}.$$

§. 122.

Auf eben diese Weise kann man auch verfahren, wenn noch eine zweyte Trapezoid ꝛc. unter eben denselben Bedingungen soll abgeschnitten werden, nachdem man doch vorläufig die Seite DC, und den Winkel DCB aus den Formeln (§. 95. Auflös. 2.) berechnet hat.

§. 123.

Aufgabe. Es sind (Fig. 21.) in dem Vierecke ABEF die Winkel A, B, und die Seite AB gegeben: man soll von demselben eine gegebene Trapezoid ABCD abschneiden, so daß die Theilungslinie DC die Seite AF unter einem gegebenen Winkel D schneide.

Auflösung. Es sey AD = d die Seite des abzuschneidenden Stückes, welche gesucht werden soll, so ist (§. 101.)

d

$$d = \pm \sqrt{\left(\frac{a \sin. B}{\sin. (C+D)}\right)^2 \pm \frac{2 S \sin. C - a^2 \sin. B \sin. (B+C)}{\sin. D \sin. (C+D)}}$$
$$\mp \frac{a \sin. B}{\sin. (C+D)}.$$

3. B. Es sey A = 113° 10′; B = 62° 14′½; D = 87°; a = 274,2; S = 75296,3.

log. sin. B = 9,9469039
log. a = 2,4380675

12,3849714 − 10

log. sin. (C + D) = 8,9033828

log. 3031,02 = 3,4815886 × 2
log. 9187076 = 6,9631772
log. sin. C = 9,9961765
log. S = 4,8767736
log. 2 = 0,3010300

25,1739801 − 20

log. sin. (C + D) = 8,9033828
log. sin. D = 9,9994044

18,9027872 − 20

6,2711929 = log. 1867209.

F log.

$$\log.\sin.(B+C) = 9{,}5375070$$
$$\log.\ \sin.B = 9{,}9469039$$
$$2\log.a = 4{,}8761350$$

$$24{,}3605459 - 20$$
$$18{,}9027872 - 20$$

$$5{,}4577587 = \log.\ 286918{,}5$$

$$9187076$$
$$286918{,}5$$

$$9473994{,}5$$
$$1867209 \qquad 3031{,}02$$

$$\sqrt{7606785{,}5} = 2758{,}03$$

$$d = 272{,}99 = 273.$$

§. 124.

Aufgabe. Man soll (Fig. 20.) von dem Vielecke ABCDEFG gegen A ein gegebenes Stück S abschneiden, so daß die Theilungslinie mit der gegebenen MN parallel laufe.

Auflösung. Man ziehe durch alle Eckpunkte der Figur nach der Ordnung Linien mit MN parallel, und berechne auf die (§. 95.) ausführlich gelehrte Weise die nur gezogenen Parallelen, und die Inhalte von den Dreyecken und Trapezen, in welche so das Vieleck getheilt worden. Man addire zum Dreyecke AGg die erste Tra-

pez

pez BbGg, und schreibe die Summe besonders; man addire zu dieser Summe die zweyte Trapez, und schreibe die Summe wieder besonders, u. s. w. Nun vergleiche man diese besondern Summen nach der Ordnung mit dem Inhalte des abzuschneidenden Stückes, und suche, welche in Ansehung dessen die nächst kleinere sey. Es sey z. B. die Summe aus dem Dreyecke und den beyden folgenden Trapezen = p, die nächst kleinere, oder $p < S$, so muß die Theilungslinie VX nothwendig zwischen die beyden Parallelen Cc und Dd fallen. Zieht man ferner p von S ab, so ist $S - p = s$ das Stück CcVX, was von der Trapez CcdD noch abgeschnitten werden muß, um das abzuschneidende Stück S vollends zu erhalten. — Das Abschneiden des Stückes s geschieht nach der (§. 119.) angegebenen Formel, das, weil schon aus der Berechnung des Inhaltes von dem ganzen Vielecke (§. 95.) in der Trapez CcdD nebst den vier Winkeln die Seite Cc bekannt ist, keine Beschwerniß mehr auf sich hat.

§. 125.

Aufgabe. Man soll (Fig. 26.) von dem Vielecke ABCDEFG gegen A ein gegebenes Stück S abschneiden, so daß die Theilungslinie durch einen bestimmten, in einer von des Vieleckes Seiten gelegenen Punkt L durchgehe.

Auflösung. Man zerlege das Vieleck aus dem Punkte L in Dreyecke, und berechne nach der Ordnung derselben Inhalte, und die Seiten, welche in dem Punkte L zusammenstossen; die gefundenen Dreyecke bringe man je zwey, je drey u. s. w. in eine Summe, und vergleiche

jede dieser besondern Summen, wie schon bey Auflösung der vorigen Aufgabe ist gelehrt worden, mit dem abzuschneidenden Stücke S. Es sey die Summe aus dem ersten und zweyten Dreyecke = p, zunächst kleiner als das abzuschneidende Stück S, so kömmt die Theilungslinie LX in dem dritten Dreyecke BCL zwischen BL und CL zu liegen, und BXL = s = S — p ist das, von dem Dreyeck BCL noch abzuschneidende Stück, von welchem die Seite BX nach der (§. 115.) angeführten Formel gefunden wird.

§. 126.

Aufgabe. Man soll (Fig. 27.) von dem Vielecke ABCDEFG ein gegebenes Stück abschneiden, so, daß die Theilungslinie durch einen innerhalb des Vieleckes gelegenen Punkt L, welchen die Linie AL, und der Winkel BAL bestimmen, durchgehe.

Auflösung. Man zerlege das Vieleck aus L in Dreyecke, und berechne, von dem ABL angefangen, nach der Ordnung derselben Inhalte, und nach L hinlaufende Seiten. Die Möglichkeit, diese Vorschrift in Ausübung zu bringen, erhellet daraus, daß in dem Dreyecke ABL, mit dessen Berechnung der Anfang gemacht werden soll, nebst der Seite AB noch die Seite AL und der Winkel BAL, welche die Lage des Punkts L bestimmen, als bekannt können angenommen werden. — Aus Vergleichung der besondern Summen, die man durch wiederholtes Addiren der erstern Dreyecke zu dem jedesmal folgenden erhält, mit dem abzuschneidenden Stücke S ergiebt sich das Dreyeck, in welches die Theilungslinie fällt. Gesetzt, die Theilungs-

lungslinie LX falle in das Dreyeck DCL, so ist CXL das Dreyeck, was zu den zwey erstern noch addirt werden muß, um das abzuschneidende Stück S zu erhalten. Die Seite CX im Dreyecke CXL wird gleichfalls nach (§. 115.) berechnet.

§. 127.

Ich habe bisher nur gezeigt, wie von einem Vielecke ein gegebenes Stück, unter den drey vornehmsten Bedingungen, abgeschnitten werden könne; und zum Theil braucht man auch nicht mehr zu wissen, um ein Vieleck, unter eben diesen Bedingungen, in mehrere, gleiche oder ungleiche, Theile zu theilen, so fern man nur auf folgende zwey Lehrsätze beständig zurücksieht:

1) Daß man nicht jeden Theil besonders, sondern immer nur die Summe aller erstern Theile nach der Ordnung abschneidet;

2) daß man das zu theilende Vieleck, immer nur mit Rücksicht auf die jedesmalige Bedingung, vorläufig in Dreyecke oder Trapezen zerlegt, damit dieselben auf gewisse Art mit dem abzuschneidenden Stücke, der Lage nach übereinstimmen.

Diesem letztern Lehrsatze zufolge hat man schon bey Auflösung jeder der letztern Aufgaben eine andere Zerlegung des zu theilenden Vieleckes zum Grunde gelegt. Auf die schickliche Anwendung dieses Lehrsatzes kömmt es vornehmlich da an, wo die Theilungslinien alle, nach einer vierten Bedingung, aus eigenen, auf einer Seite des Umfanges gegebenen Punkten auslaufen sollen.

§. 128.

Kann man durch eine leichte vorläufige Rechnung, oder jene gewöhnliche, welche auf unmittelbarer Messung einiger Linien auf dem Papier beruhet, erfahren, zwischen welchen Constructionslinien die jedesmalige Theilungslinie zu liegen komme, und die einzelnen Theile fallen als Trapezoiden aus, so mag man dann auch nach der Formel (§. 120.) arbeiten; wie man an dem nur genannten Orte auch umgekehrt hätte verfahren, und die Theilung auf das Abschneiden eines Dreyeckes (§. 115.) gründen können, was bey Auflösung der letztern zwey Aufgaben geschehen ist.

Anwendung auf die Verwandlung der gebrochenen Gränzlinien in gerade.

§. 129.

Die große Nutzbarkeit der hieher gehörigen Aufgaben kann niemand bezweifeln, der die Unbequemlichkeiten kennt, die aus unnöthiger Anhäufung der Gränzzeichen, und aus den unzähligen Wendungen der Gränzlinie zu entstehen pflegen. Der ältere Tobias Mayer hat schon längst, mit sehr vielem Scharfsinne, diese Aufgaben durch Zeichnung aufgelöset, und damit den Feldmessern gezeigt, wie sie den, aus den vielen Brechungen der Gränzlinie entspringenden Uebeln, auf Verlangen der Eigenthümer, leicht abhelfen könnten. Da es nützlich, und im Falle, wo die zu findenden geraden Gränzlinien eben so richtig, nach ihren Längen und Neigungen, bestimmt werden sollen,

len, als die durch unmittelbare Messung und trigonometrische Rechnung schon gefundenen es sind, auch nothwendig seyn dürfte, von eben diesen Aufgaben eine trigonometrische Auflösung in Bereitschaft zu haben; so will ich hier diejenige, die sich aus einigen, bey Berechnung des Inhaltes der Vierecke, gebrauchten Formeln ganz ungekünstelt ableiten läßt, dem wißbegierigen Leser mittheilen.

§. 130.

Aufgabe. Es sey (Fig. 28.) BCDE eine gebrochene Gränzlinie: man soll dieselbe, ohne Nachtheil des Inhaltes der Figur, in eine gerade verwandeln.

Auflösung. Man ziehe aus B durch CD eine gerade Linie, welche die derselben zunächst liegende Gränzlinie DE in Ω schneidet. Soll die gezogene Linie BΩ die zu suchende gerade Gränzlinie seyn, so müssen die Dreyecke ΩOD, BOC, deren algebraische Summe den Inhalt des verschobenen Viereckes ΩBCD ausmacht, einander vollkommen gleich seyn. Nimmt man in diesem Vierecke, wie bisher immer geschehen ist, den hohlen Winkel $BCD = C$, den erhabenen $CD\Omega = D$, die Seite $BC = b$, $CD = c$, $D\Omega = d$, und den Inhalt $= S$ an, so wird (§. 90.)

$$S = \frac{1}{2} c\,(d \sin. D + b \sin. C) - \frac{1}{2} bd \sin. (C + D).$$

Nun soll, nach der Bedingung der Aufgabe, S oder der Dreyecke ΩOD, BOC algebraische Summe $= 0$ seyn; daher wird

cd

$$cd\ \sin D + bc\ \sin C = bd\ \sin(C + D),$$ und

$$d = \frac{bc\ \sin C}{b\ \sin(C + D) - c\ \sin D} = \frac{b\ \sin C : \sin D}{b\ \sin(C + D) : c\ \sin D - 1}.$$

Z. B. Es sey $b = 170$; $c = 432$; $C = 114^\circ\ 23'$; $D = 236^\circ\ 43'$, und d soll gesuchet werden.

$\log. \sin C = 9,9594248$
$\log. b = 2,2304489$
――――――――
$12,1898737 - 10$
$\log. \sin D = 9,9221891 - 10$
――――――――
$2,2676846 = \log. 185,2.$

$l. \sin(C + D) = 9,1895195$	$l. \sin D = 9,9221891$
$\log. b = 2,2304489$	$\log. c = 2,6354837$
$11,4199684 - 10$	$12,5576728 - 10$
$12,5576728 - 10$	
$\log. 0,07283 = 0,8622956 - 2$	$1,00000$
	$0,07283$
$\log. 185,2 = 2,2676846$	
$\log. 0,92717 = 0,9671594 - 1$	$0,92717$

――――――――
$2,3005252 = \log. 199,8$

$d = 199,8.$

§. 131.

§. 131.

Ereignet es sich, daß die aus B durch CD gezogene Linie nicht in DE einschneidet, so ist die Auflösung dieser Aufgabe aus dem Punkte B unmöglich, und man muß sie aus einem andern versuchen.

§. 132.

Aufgabe. Es ist in der Linie DE der Punkt Ω gegeben, wo die gerade Gränzlinie BΩ einschneidet, man soll, unter dieser und den vorigen Bedingungen, den Winkel DΩB finden, unter welchem beyde Linien sich schneiden.

Auflösung. Es war (§. 92.)

$$S = \frac{-d \sin.(B+C+D)}{2 \sin. B} (c \sin. C - d \sin.(C+D)) + \tfrac{1}{2} bc \sin. C.$$

Daher ist, wegen S = o, hier

$$\frac{d \sin.(B+C+D)}{\sin. B} (c \sin. C - d \sin.(C+D)) = bc \sin. C, \text{ folglich}$$

$$d(\cot. B + \cot.(C+D))(c \sin. C - d \sin.(C+D)) = \frac{bc \sin. C}{\sin.(C+D)}; \text{ also}$$

$$\cot. B = \frac{bc \sin. C : \sin.(C+D)}{d(c \sin. C - d \sin.(C+D))} - \cot.(C+D)$$

$$= \frac{bc \sin. C : d^2 \sin.(C+D)^2}{c \sin. C : d \sin.(C+D) - 1} - \cot.(C+D).$$

Hat

Hat man auf diese Weise B gefunden, so erhält man dann durch eine sehr leichte Rechnung

$\Omega = B + C + D - 4R$. *)

Daher ist $\Omega + 2R$ der Winkel, welchen die gerade Gränzlinie $B\Omega$ mit ΩE in Ω macht.

Z. B. Es sey $b = 170$; $c = 432$; $d = 199,8$; $C = 114° 23'$; $D = 236° 43'$, und Ω soll gesuchet werden.

l. sin. C = 9,9594248
log. b = 2,2304489
log. c = 2,6354837

14,8253574 − 10
22,9800894 − 20

1,8452680 = log. 70,03.

2 log. d = 4,6010504
2 l. sin. (C + D) = 18,3790390

22,9800894
− 20

lg. sin. C = 9,9594248
log. c = 2,6354837

12,5949085 − 10
11,4900447 − 10

1,1048638 = log. 12,73
1

− 1,1376705 = log. 13,73
1,8452680 = log. 70,03

0,7075975 = log. 5,100

lg. sin. (C + D) = 9,1895195
log. d = 2,3005252

11,4900447
− 10

cos.

*) Es sind nämlich in dem verschobenen Vierecke die vier Winkel zusammen nur in so fern 4 R gleich, als der Winkel Ω negativ genommen wird.

$$\cot.(C+D) = 6{,}3858665$$

$$1{,}2858665 = \cot.\,37^\circ\,53'$$

$$B = 37^\circ\,53;$$

$$\Omega = 28^\circ\,59'.$$

§. 133.

Aufgabe. Es sind von der gebrochenen Gränzlinie BCDΩ die Theile b, c, d, und die Winkel B, D gegeben: die gerade Gränzlinie BΩ = ω zu finden.

Auflösung. Es war (§. 93.)

$$S = \tfrac{1}{2}(\omega b \sin.B + cd \sin.D).$$

Daher ist hier, S = o angenommen,

$$\omega b \sin.B = -cd \sin.D, \text{ und}$$

$$\omega = \frac{-cd \sin.D}{b \sin.B}.$$

z. B. Es sey b = 170; c = 432; d = 199,8; B = 37° 53′; D = 236° 43′, und ω soll gesuchet werden.

$$\log.\sin.D = 9{,}9221891$$

log. c = 2,6354837	log. sin. B = 9,7882077
log. d = 2,3005252	log. b = 2,2304489
14,8581980 − 10	12,0186566 − 10
12,0186566 − 10	

$$2{,}8395414 = \log.691{,}1;$$

$$\omega = 691{,}1.$$

§. 134.

§. 134.

Mit Hilfe dieser drey Aufgaben wird nicht nur eine zweymal gebrochene Gränzlinie in eine gerade verwandelt, sondern auch, wenn mit einer mehrmal gebrochenen diese Verwandelung vorgenommen werden soll, zur Fortsetzung der Arbeit der Weg gebahnet. Die Weise dieser Fortsetzung brauche ich die nicht erst zu lehren, welche sich mit der Methode des sel. Tob. Mayers aus seines Sohnes Schriften schon näher bekannt gemacht haben, und die andern muß ich, weil sie dem Feldmesser beynahe unentbehrlich sind, ohne dieß dahin weisen.

Polygonometrie.

Die vornehmsten polygonometrischen Formeln.

§. 135.

Wie unter den dreyen zu bestimmenden Stücken eines Dreyeckes wenigst eine Seite, so muß unter den drey unbekannten Stücken eines Vieleckes wenigst ein Winkel seyn. Denn sind in einem Vielecke alle äußern Winkel, auch alle Seiten, drey ausgenommen, bekannt, so ist es, was sich auch ohne Beweis einsehen läßt, noch nicht ganz bestimmt, und muß zur vollen Bestimmung die Zahl der bekannten Seiten noch um eine vermehrt werden. Die drey unbekannten Stücke sind daher entweder

1) zwey Seiten und ein Winkel, oder

2) eine Seite und zwey Winkel, oder

3) drey Winkel.

§. 136.

In jedem dieser drey Fälle läßt sich eines von den drey unbekannten Stücken mit den bekannten durch eine Gleichung verbinden, und die aus derselben jedesmal wegbleibenden sind entweder

1) eine Seite und ein Winkel, oder

2) zwey Winkel.

§. 137.

Unter jeder Voraussetzung kann das in der Gleichung enthaltene unbekannte Stück entweder eine Seite, oder ein Winkel seyn. Und daher sind, diese unbekannten Stücke zu finden, vier Gleichungen erforderlich:

1) Worin das unbekannte Stück eine Seite ist, und woraus zwey Winkel wegbleiben;

2) worin das unbekannte Stück ein Winkel ist, und woraus zwey Winkel wegbleiben;

3) worin das unbekannte Stück eine Seite ist, und woraus eine Seite und ein Winkel wegbleiben;

4) worin das unbekannte Stück ein Winkel ist, und woraus eine Seite und ein Winkel wegbleiben.

§. 138.

Jede dieser vier Gleichungen wird, in Hinsicht auf die Lage der unbekannten Stücke, wieder verschiedene Fälle enthalten. Denn es können die unbekannten Stücke zusammen liegen, und aus einander. Da der erste und einfachste Hauptfall zu unserer Absicht hinreichet, so werden wir uns mit dessen Untersuchung begnügen, und auf die Erfindung der erwähnten vier Gleichungen allein, ohne andere daraus abzuleiten, unsere Bemühungen einschränken.

§. 139.

Aufgabe. Es sind in einem Vielecke zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel unbekannt: man soll die Verbindung der einen unbekannten Seite mit den bekannten Seiten und Winkeln durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflösung. Es sey (Fig. 6.) ABCDEF ein Sechseck, die Seiten AF, EF, und der von selben eingeschlossene Winkel F die unbekannten Stücke desselben, und die Seite EF insbesondere das, was gesuchet werden soll. Diesen Bedingungen allen leistet die oben (§. 32.) gefundene erste Grundgleichung vollkommenes Genügen; es ist daher, unter den daselbst angenommenen Bezeichnungen der Seiten und Winkel:

$$a \sin. A + b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) + d \sin. (A + B + C + D) + e \sin. (A + B + C + D + E) = 0.$$

Da

Da in dieser Gleichung alle Winkel, auch alle Seiten, e ausgenommen, bekannt sind, so läßt sich dieselbe leicht finden.

§. 140.

Aufgabe. Es sind in einem Vielecke eine Seite nebst den zwey anliegenden Winkeln unbekannt: man soll die Verbindung der unbekannten Seite mit den bekannten Seiten und Winkeln durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflös. Es sey (Fig. 6.) in dem Sechsecke ABCDEF die Seite AF nebst den anliegenden Winkeln A und F unbekannt, und f solle gesuchet werden. Nach (§. 32.) ist

$$a \sin. A + b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) + d \sin. (A + B + C + D) + e \sin. (A + B + C + D + E) = 0, \text{ und}$$

$$a \cos. A + b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) + d \cos. (A + B + C + D) + e \cos. (A + B + C + D + E) = - f.$$

Man quadrire diese beyden Gleichungen, und addire die Quadrate, so erhält man, nach den gemachten Reductionen:

$$f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2 ab \cos. B + 2 ac \cos. (B + C) + 2 ad \cos. (B + C + D) + 2 ae \cos. (B + C + D + E) + 2 bc \cos. C + 2 bd \cos. (C + D) + 2 be \cos. (C + D + E) + 2 cd \cos. D + 2 ce \cos. (D + E) + 2 de \cos. E.$$

§. 141.

Aufgabe. Es sind in einem Vielecke drey auf einander folgende Winkel unbekannt: man soll die Verbindung des mittlern derselben mit den bekannten Seiten, und übrigen bekannten Winkeln durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflös. Es seyen (Fig. 6.) im Sechsecke ABCDEF die Winkel A, F, E unbekannt, und F solle gesuchet werden. Da (§. 28.)

$$A + B + C + D + E = (m + 1)\, 4R - F,$$

so ist auch (§. 11.)

$$\sin.(A+B+C+D+E) = \sin.((m+1)\,4R-F)$$
$$= \sin.(4R - F) = -\sin. F.$$

Aus den nämlichen Gründen, und weil $F > 2R$, erhält man $\cos.(A+B+C+D+E) = -\cos. F.$ Daher verwandeln sich die beyden Grundgleichungen in diese:

$$a \sin. A + b \sin.(A+B) + c \sin.(A+B+C) + d \sin.(A+B+C+D) = e \sin. F,$$ und

$$a \cos. A + b \cos.(A+B) + c \cos.(A+B+C) + d \cos.(A+B+C+D) = e \cos. F - f.$$

Man quadrire diese Gleichungen, addire die Quadrate, und reducire die Summen, so ergiebt sich:

$$-\cos. F = \left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 \\ + 2ab \cos. B + 2ac \cos.(B+C) \\ + 2ad \cos.(B+C+D) \\ + 2bc \cos. C + 2bd \cos.(C+D) \\ + 2cd \cos. D. \end{array}\right\} : 2ef$$

§. 142.

§. 142.

Aufgabe. Es sind in einem Vielecke eine Seite nebst den zwey anliegenden Winkeln unbekannt: man soll die Verbindung zwischen dem einen unbekannten Winkel, und den bekannten Winkeln und Seiten durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflösung. Es seyen (Fig. 6.) im Sechsecke ABCDEF die Seite AF, und die ihr anliegenden Winkel A, F unbekannt, und A solle gesuchet werden. Man substituire in der ersten Grundgleichung für sin. (A + B); sin. (A + B + C) u. s. w. den Sinus der Summe zweyer Winkel A und B; A und B + C u. s. w., und nehme die gehörigen Reductionen vor, so wird

$$\text{tang. } A = -\left\{\begin{array}{l} + b \sin. B \\ + c \sin.(B+C) \\ + d \sin.(B+C \\ \quad +D) \\ + e \sin.(B+C \\ \quad +D+E) \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} + a + b \cos. B \\ + c \cos.(B+C) \\ + d \cos.(B+C \\ \quad +D) \\ + e \cos.(B+C \\ \quad +D+E). \end{array}\right.$$

§. 143.

Ich habe dem Leser den Weg, auf welchem diese letztern drey Formeln erfunden worden, zwar nicht vorgezeichnet, aber doch so deutlich gewiesen, daß er ihn unmöglich verfehlen kann. Und die mehrere Mühe, die er sich etwa geben muß, wird ihm durch das erhabene, geistige Vergnügen, bey dem plötzlichen Anschauen der Wahrheit, wieder reichlich vergolten werden.

Anwendung auf die Messung sehr großer Weiten.

§. 144.

Aufgabe. Man soll die Entfernung zweyer Oerter (Fig. 29.) A und F finden, wenn dieselbe so groß ist, daß man sie nicht wohl aus einer einzigen Standlinie bestimmen, auch von A nach F nicht hinsehen kann.

Auflösung. Man hänge die Oerter A und F durch schicklich gewählte Standlinien zusammen, so daß diese mit der zu messenden AF eine verschobene Figur ABCDEF bilden; messe die Linien AB, BC, CD, DE, EF auf mittelbare oder unmittelbare Weise, nebst den eingeschlossenen Winkeln B, C, D, E, und verwandle diese in Hinsicht der erwähnten Figur in äußere, so ist, nach den (§. 140.) angenommenen Benennungen:

$$
\begin{aligned}
AF^2 = {} & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \\
& + 2\,ab \cos B + 2\,ac \cos(B + C) + 2\,ad \\
& \quad \cos(B + C + D) + 2\,ae \cos(B + C \\
& \quad + D + E) \\
& + 2\,bc \cos C + 2\,bd \cos(C + D) + 2\,be \\
& \quad \cos(C + D + E) \\
& + 2\,cd \cos D + 2\,ce \cos(D + E) \\
& + 2\,de \cos E.
\end{aligned}
$$

Z. B. Es sey $a = 410$; $b = 251$; $c = 83$; $d = 321$; $e = 171$; $B = 91^\circ\ 55'$; $C = 74^\circ\ 36$;

D

D = 233° 41′; E = 306° 48′, und AF solle gesuchet werden.

$$\cos. B = \cos. 91° 55' = - \cos. 88° 5'$$
$$\cos. (B + C) = \cos. 166° 31' = - \cos. 13° 29'$$
$$\cos. (B + C + D) = \cos. 400° 12' = + \cos. 40° 12'$$
$$\cos. (B + C + D + E) = \cos. 707° = + \cos. 13°$$
$$\cos. C = + \cos. 74° 36'$$
$$\cos. (C + D) = \cos. 308° 17' = + \cos. 51° 43'$$
$$\cos. (C + D + E) = \cos. 615° 5' = - \cos. 75° 5'$$
$$\cos. D = \cos. 233° 41' = - \cos. 53° 41'$$
$$\cos. (D + E) = \cos. 540° 29' = - \cos. 0° 29'$$
$$\cos. E = \cos. 306° 48 = + \cos. 53° 12'$$

Wird nach dieser Vorarbeit auf gewöhnliche Weise verfahren, so erhält man

$$AF^2 = 168100 + 63001 + 6889 + 103041 + 29241$$
$$- 6883,8 - 66184,1 + 201046,4 + 136626,1$$
$$+ 11064,7 + 99835,6 - 22096,9$$
$$- 31558,5 - 28385$$
$$+ 65762$$
$$= 729498,5;$$

$$AF = 854,1.$$

§. 145.

Es ist bey dieser Auflösung ganz gleichgültig, ob die Standlinien in die zu findende Linie AF einschneiden, oder nicht; nur muß man jene so wählen, daß die Winkel, welche sie unter einander machen, weder zu spitz, noch zu stumpf ausfallen, und von der Richtigkeit ihrer Messung sich, so viel möglich ist, zu versichern suchen. Die hier angenommene Voraussetzung, daß die Winkel bey A und F nicht gemessen werden können, erschweret nicht nur die Prüfung der übrigen, welche in Rechnung kommen, sondern macht sie auch ohne andere gemessene Hilfswinkel schlechthin unmöglich. Diese Hilfswinkel ergeben sich, wenn man je zwey und zwey nächste Standlinien durch eine dritte zu einem Dreyecke verbindet. — Nur die Messung dieser Hilfswinkel macht die Prüfung der Hauptwinkel möglich.

§. 146.

Aufgabe. Man soll die Entfernung zweyer Oerter (Fig. 29.) A und F finden, die zwar, wegen ihrer Größe, sich nicht aus einer einzigen Standlinie messen, aber doch ganz übersehen läßt.

Auflösung. Man verfahre ganz so, wie (§. 144.) gelehrt worden, und messe noch überdieß die Winkel BAF und AFE, und prüfe und verbessere diese und die übrigen Winkel auf die jedem Feldmesser bekannte Weise, so läßt sich dann (§. 32.) mit sehr vieler Zuverläßigkeit schließen:

$$AF = -a\cos A - b\cos(A+B) - c\cos(A+B+C) - d\cos(A+B+C+D) - e\cos(A+B+C+D+E).$$

Z. B. Es sey $a = 410$; $b = 251$; $c = 83$; $d = 321$; $e = 171$; $A = 149° 5'$; $B = 91° 55'$; $C = 74° 36'$; $D = 233° 41'$; $E = 306° 48'$, und AF solle gesuchet werden.

$\cos. A = \cos. 149° 5' = - \cos. 30° 55'$

$\cos. (A + B) = \cos. 241° = - \cos. 61'$

$\cos. (A + B + C) = \cos. 325° 36' = + \cos. 44° 24'$

$\cos. (A + B + C + D) = \cos. 549° 17' = - \cos. 9° 17'$

$\cos. (A + B + C + D + E) = \cos. 856° 5' = - \cos. 43° 55'$.

$AF = - 351,8 - 121,7 + 59,3 - 316,8 - 123,2 = 913,5 + 59,3 = 854,2.$

§. 147.

Aufgabe. Es sind zwey Oerter (Fig. 29.) A und F so weit von einander entfernt, daß man von einem zum andern hin nicht sehen kann: man soll die Richtung der Linie AF finden, welche die Entfernung beyder mißt.

Auflösung. Man hänge die Oerter A und F wieder durch schicklich gewählte Standlinien AB, BC, CD, DE und EF zusammen, und messe diese, und die von selben eingeschlossenen Winkel B, C, D und E, so ist (§. 142.), weil der Winkel A die Richtung der Linie AF bestimmt,

$$\text{tang. } A = -\left\{\begin{array}{l} + b \text{ sin. } B \\ + c \text{ sin.}(B+C) \\ + d \text{ sin.}(B+C \\ \quad +D) \\ + e \text{ sin.}(B+C \\ \quad +D+E) \end{array}\right. : \left\{\begin{array}{l} + a + b \text{ cos. } B \\ \quad + c \text{ cos.}(B+C) \\ \quad + d \text{ cos.}(B+C \\ \qquad +D) \\ \quad + e \text{ cos.}(B+C \\ \qquad +D+E) \end{array}\right.$$

Z. B. Es sey $a = 410$; $b = 251$; $c = 83$; $d = 321$; $e = 171$; $B = 91^\circ\ 55'$; $C = 74^\circ\ 36'$; $D = 233^\circ\ 41'$; $E = 306^\circ\ 48'$, und A sölle gesuchet werden.

$\text{sin. } B = \text{sin. } 91^\circ\ 55' = + \text{sin. } 88^\circ\ 5'$; $\text{cos. } B = - \text{cos. } 88^\circ\ 5'$

$\text{sin. }(B + C) = \text{sin. } 166^\circ\ 31' = + \text{sin. } 13^\circ\ 29'$; $\text{cos. }(B + C) = - \text{cos. } 13^\circ\ 29'$

$\text{sin. }(B+C+D) = \text{sin. } 400^\circ\ 12' = + \text{sin. } 40^\circ\ 12'$; $\text{cos. }(B + C + D) = + \text{cos. } 40^\circ\ 12'$

$\text{sin. }(B + C + D + E) = \text{sin. } 707^\circ = - \text{sin. } 13^\circ$; $\text{cos. }(B + C + D + E) = + \text{cos. } 13^\circ$

$$\text{tang. } A = \frac{-250{,}87 - 19{,}35 - 207{,}19 + 38{,}47}{410 - 8{,}39 - 80{,}71 + 245{,}18 + 166{,}62}$$

$$= \frac{-438{,}94}{732{,}7} = -0{,}599072$$

$$= \text{tang. } 149^\circ\ 5';$$

$$A = 149^\circ\ 5'.$$

§. 148.

Diese Aufgabe, welche mehr in Ansehung der gebrauchten Auflösungsart, als für sich selbst, mit den beyden vorigen einige Aehnlichkeit hat, scheint hier nicht ganz an ihrem Orte zu stehen: allein weil sie theils zur leichtern Messung großer unübersehbarer Weiten vorbereitet, theils auch derselben Richtung bestimmt, so mag man ihr immer diesen Platz gönnen. — Sie ist besonders da vortheilhaft zu gebrauchen, wo von einem Orte zum andern, der aus dem ersten nicht sichtbar ist, Strassen angelegt, oder Alleen durch eine Waldung gehauen werden sollen.

Anwendung auf den genauen Auftrag des Netzes der Standlinien.

§. 149.

Die nächst vorhergehenden Aufgaben, aber noch weit mehr die, welche gleich folgen soll, sind bey Landesvermessungen ungemein brauchbar. — Nachdem an jeder Standlinie die nöthigen Winkel gemessen, und verbessert, und aus diesen, und einer gemessenen Standlinie die übrigen alle berechnet worden, zu welchem Ende ein ohngefährer Entwurf von der Lage aller dieser Linien (Netz) schon vorläufig mußte verfertiget worden seyn, wird endlich das berechnete Netz mit aller möglichen Genauigkeit aufgetragen. Man hat sich hiezu immer nur der Trigonometrie bedient; und in so fern der Auftrag nur vermittelst berechneter Absciſſen und Ordinaten geschah, war gegen die Richtigkeit dieser Methode auch gar nichts einzuwenden:

den: allein weil die zur Berechnung dieser Absciſſen und Ordinaten nöthigen Winkel, und die Poſitivität oder Negativität der Theile dieſer Linien nur aus Betrachtung der Figur gefolgert werden konnten, war die Ausübung dieſer Methode noch ziemlich mühesam, und mit Zeitverluſt verbunden.

§. 150.

Der berühmte Herr Hofrath und Profeſſor J. T. Mayer hob dieſe Unbequemlichkeit, indem er die trigonometriſche Methode auf allgemeinere Formeln brachte, mit ſehr gutem Erfolge. Nach denſelben, was auch in der Polygonometrie geſchieht, kann jeder in Rechnung kommende Winkel, ohne den nächſtvorhergehenden nöthig zu haben, unmittelbar beſtimmt werden. Allein das nebenher gebrauchte Mittel, die Lage der Absciſſen und Ordinaten zu beurtheilen, und zu entſcheiden, ob die Theile, um dieſelben zu erhalten, addirt oder ſubtrahirt werden müſſen, iſt weniger einfach, etwas ſchwerer, und irrſamer in der Ausübung, als das iſt, deſſen man ſich in der Polygonometrie bedient, wo die Beſchaffenheit der ganzen Absciſſen und Ordinaten, und ihrer Theile mit der Natur goniometriſcher Linien inniger verwebt iſt, und von ſelben ganz allein ihre Beſtimmung erhält. — Das Vorzügliche der polygonometriſchen Methode vor der trigonometriſchen ſcheint außer Zweifel zu ſeyn.

§. 151.

Aufgabe. Es ſind von dem Netze einiger Standlinien alle Seiten und Winkel bekannt: man ſoll daſſelbe mit voller Genauigkeit auftragen.

Auf-

Auflösung. Es sey (Fig. 30.) ABCDEF der rohe Entwurf des Netzes, das völlig genau aufgetragen werden soll. Man beurtheile aus der Reihenfolge der Dreyecke, durch welche Standlinien die Oerter A, B, C, D, E, F zusammen gehängt werden müssen, daß eine gebrochene Linie ABCDEF entstehe, und dann, wie man die Winkel der Dreyecke, um nach der Ordnung die Winkel ABC, BCD, CDE, DEF zu erhalten, zusammenrechnen müsse. Nun ziehe man durch die Punkte A, F, welche durch keine Standlinie zusammenhangen, die Linie AF, so entsteht das verschobene Vieleck ABCDEF, in welchem alle Seiten und Winkel, die Seite AF, und die ihr anliegenden Winkel ausgenommen, bekannt sind. Man verwandle ferner die schon bekannten innern Winkel des erhaltenen Vieleckes in äußere, und suche daraus, und aus den sie einschließenden Seiten (§. 142.) den äußern Winkel A. Endlich bestimme man nach den beyden Grundgleichungen (§. 32.) die mit den Punkten B, C, D, E auf der Linie AF zusammengehörigen Abscissen und Ordinaten, oder, was man sie füglicher heißen könnte, Längen und Breiten. Wenn daher Ab, Ac, Ad, Ae die Längen, und Bb, Cc, Dd, Ee die Breiten der Punkte B, C, D, E bezeichnen, so ist

$$Ab = a \sin. A \,;\; Bb = a \cos. A$$

$$Ac = a \sin. A + b \sin. (A + B) \,;\; Cc = a \cos. A + b \cos. (A + B)$$

$$Ad = a \sin. A + b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) \,;$$
$$Dd = a \cos. A + b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) \text{ u. s. w.}$$

Z. B. Es sey $a = 410$; $b = 251$; $c = 83$; $d = 321$; $e = 171$; $B = 91^\circ\ 55'$; $C = 74^\circ\ 36'$; $D = 233^\circ\ 41'$; $E = 306^\circ\ 48'$.

$\text{tang. } A = -0{,}599072 = \text{tang. } 149^\circ\ 5'$.

$\text{cos. } A = -\text{cos. } 30^\circ\ 55'$

$\text{cos. } (A + B) = -\text{cos. } 61^\circ$

$\text{cos. } (A + B + C) = +\text{cos. } 44^\circ\ 24'$

$\text{cos. } (A + B + C + D) = -\text{cos. } 9^\circ\ 17'$

$\text{cos. } (A + B + C + D + E) = -\text{cos. } 43^\circ\ 55'$.

$\text{sin. } A = +\text{sin. } 30^\circ\ 55'$

$\text{sin. } (A + B) = -\text{sin. } 61^\circ$

$\text{sin. } (A + B + C) = -\text{sin. } 44^\circ\ 24'$

$\text{sin. } (A + B + C + D) = -\text{sin. } 9^\circ\ 17'$

$\text{sin. } (A + B + C + D + E) = +\text{sin. } 43^\circ\ 55'$.

$Ab = -351{,}8$

$Ac = -351{,}8 - 121{,}7 = -473{,}5$

$Ad = -351{,}8 - 121{,}7 + 59{,}3 = -414{,}2$

$Ae = -351{,}8 - 121{,}7 + 59{,}3 - 316{,}8 = -731{,}0$

$AF = -351{,}8 - 121{,}7 + 59{,}3 - 316{,}8 - 123{,}2 = -854{,}2$.

$Bb = +210{,}65$

$Cc = +210{,}65 - 219{,}53 = -8{,}88$

$Dd = +210{,}65 - 219{,}53 - 58{,}07 = -66{,}95$

$Ee = +210{,}65 - 219{,}53 - 58{,}07 - 51{,}41 = -118{,}36$.

Wer-

Werden die nun gefundenen negativen Längen auf der Längenlinie AF vorwärts von A nach F, und die positiven Breiten darüber, die negativen darunter nach der Ordnung aufgetragen, so ist der fertige Auftrag der gezogenen Standlinien AB, BC, CD, DE, EF völlig genau, und eben so auch der der übrigen, welche zur Vollendung des Netzes noch gezogen werden müssen.

§. 152.

In diesem Beyspiele sind die Längen der Oerter alle negativ ausgefallen. Ereignet sich aber das Gegentheil, und eine oder die andere Länge fällt auch positiv aus, so müssen dieselben aus A auf der rückwärts verlängerten Längenlinie aufgetragen werden. Nach dieser Methode ist also, um entscheiden zu können, ob die berechneten Längen und Breiten vor- oder rückwärts, auf- oder abwärts getragen werden sollen, keine Betrachtung der Zeichnung, überhaupt gar keine Anstrengung der Einbildungskraft erforderlich. Man braucht auch nicht erst, um die Positivität oder Negativität eines Winkels zu erfahren, durch desselben Spitze mit der Längenlinie eine Parallele zu ziehen, sondern allein auf die Größe jedes Winkels A oder A + B, oder A + B + C u. s. w. Acht zu haben, oder wenn einer > 4 R ist, auf den Rest, welcher nach weggeworfenen so vielmal 4 R, als angeht, übrig bleibt. Kurz: die Größe des Winkels bestimmt (§. 11.) ganz allein die Positivität oder Negativität der Länge- und Breitetheile, wie der ganzen Längen und Breiten.

§. 153.

Es ist aber nicht nothwendig, daß die Längenlinie, wie bisher angenommen worden, selbst eine Seite der Figur sey; man kann jede andere durch A gezogene Linie, wenn man zugleich, um wieder eine geschlossene Figur zu erhalten, die gegebenen Oerter durch andere Standlinien verbindet, zur Längenlinie annehmen. Obschon es im Grunde gleichgültig ist, welchen Winkel mit AB die Längenlinie mache, pflegt man dennoch, einiger Vortheile wegen, denselben gewöhnlich so anzunehmen, daß die Längenlinie zugleich eine Mittagslinie sey, und leitet zu dem Ende diesen Winkel aus Beobachtungen ab. Wie eine Lage der Längenlinie etwas vortheilhafter, als die andere ist, so gewähret auch ein Ort, durch welchen die Längenlinie gehen, oder von dem der Auftrag anfangen soll, vor dem andern einige Vortheile. Dieser Vortheile sich zu versichern, legt man die Längenlinie durch einen Ort, dergleichen hier C ist, welcher ohngefähr mitten in der Karte sich befindet. — Die Methode, unter der Voraussetzung, daß die Längenlinie eine Mittagslinie sey, die Längen und Breiten der Oerter zu berechnen, kann für den keine Beschwerniß mehr haben, welcher das, was wir bisher gesagt haben, vollkommen inne hat.

Anwendung auf die Berechnung des Inhaltes geradliniger Figuren.

§. 154.

Aufgabe. Es sind (Fig. 31.) in dem Vielecke ABCDE alle Seiten und Winkel, die Seite ED, und die ihr anliegen=

liegenden Winkel E und D ausgenommen, gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Man fälle aus B und C auf AE die Perpendikel Bb, Cc, und wieder aus B und D auf Cc die Perpendikel Bm, Dn, so ist der doppelte Inhalt des Vieleckes, oder

$$2S = 2ABb + 2BCm + 2CDn + 2Bbcm + 2DncE.$$

Es ist aber

$$Ab = -a \cos. A \qquad Bb = +a \sin. A$$
$$Bm = -b \cos.(A+B) \qquad Cm = +b \sin.(A+B)$$
$$Dn = -c \cos.(A+B+C) \qquad Cn = -c \sin.(A+B+C)$$

und ferner

$$Ec = e + a \cos. A + b \cos.(A+B)$$
$$nc = a \sin. A + b \sin.(A+B) + c \sin.(A+B+C);$$

also

$$2ABb = -\tfrac{1}{2}a^2 \sin. 2A$$
$$2BCm = -\tfrac{1}{2}b^2 \sin. 2(A+B)$$
$$2CDn = +\tfrac{1}{2}c^2 \sin. 2(A+B+C)$$
$$2Bbcm = -2ab \sin. A \cos.(A+B)$$
$$2DncE = (-c \cos.(A+B+C) + e + a \cos. A + b \cos.(A+B)) \times (a \sin. A + b \sin.(A+B) + c \sin.(A+B+C));$$

folg-

folglich

$$2S = e(a \sin. A + b \sin.(A + B) + c \sin.(A + B + C))$$
$$+ a(b \sin. B + c \sin.(B + C))$$
$$+ b\ c \sin. C.$$

Das Gesetz, das in dieser Gleichung liegt, läßt sich schon durch bloßes Anschauen entdecken, und eben so leicht die dieser Gleichung für jede mehrseitige Figur zukommende Gestalt finden.

Z. B. Es sey (Fig. 19.) $a = 361$; $b = 383$; $c = 308$; $d = 400$; $e = 599$; $g = 531$, und $A = 66^\circ\ 37'$; $B = 95^\circ\ 16'$; $C = 269^\circ\ 29'$; $D = 74^\circ\ 5'$; $E = 88^\circ\ 23'$, und S, der Inhalt der Figur, soll gefunden werden. — Da die gegebene Figur ein Siebeneck ist, so bekömmt die Formel folgende Gestalt:

$$2S = g(a \sin. A + b \sin.(A + B) + c \sin.(A + B + C) + d \sin.(A + B + C + D) + e \sin.(A + B + C + D + E))$$
$$+ a(b \sin. B + c \sin.(B + C) + d \sin.(B + C + D) + e \sin.(B + C + D + E))$$
$$+ b(c \sin. C + d \sin.(C + D) + e \sin.(C + D + E))$$
$$+ c(d \sin. D + e \sin.(D + E))$$
$$+ d\ e \sin. E.$$

Da

Da nun

$\sin. A = + \sin. 66^\circ 37'$ $\sin.(A + B = + \sin. 18^\circ 7'$

$\sin. B = + \sin. 84^\circ 44'$ $\sin.(B + C) = + \sin. 4^\circ 45'$

$\sin. C = - \sin. 89^\circ 29'$ $\sin.(C + D) = - \sin. 16^\circ 26'$

$\sin. D = + \sin. 74^\circ 5'$ $\sin.(D + E) = + \sin. 17^\circ 32'$

$\sin. E = + \sin. 88^\circ 23'$

$\sin. (A + B + C) = + \sin. 71^\circ 22'$

$\sin. (B + C + D) = + \sin. 78^\circ 50'$

$\sin. (C + D + E) = + \sin. 71^\circ 57'$

$\sin. (A + B + C + D) = + \sin. 34^\circ 33'$

$\sin. (B + C + D + E) = + \sin. 12' 47'$

$\sin. (A + B + C + D + E) = - \sin. 53^\circ 50'$, so ist

$$2S = 175947,4 + 63239,4 + 154975,2 + 120457,7$$
$$- 256778,3$$
$$+ 137679,3 + 9207,3 + 141666,2 + 15130,3$$
$$- 117959,1 - 43340,2 + 218126,6$$
$$+ 118476,7 + 55580,1$$
$$+ 239504,7 \text{; also}$$

$2S = 1031913,3$ Q. F. und $S = 515956,6$ Q. F.

$= 12\frac{7}{8}$ Morgen 957 Q. F.

§. 155.

Aufgabe. Es sind (Fig. 31.) in dem Vielecke ABCDE alle Seiten und Winkel, die Seiten AE, ED, und den

ein=

eingeschlossenen Winkel E ausgenommen, gegeben: den Inhalt zu finden.

Auflösung. Es ist (§. 32.)

$$c \sin. D + b \sin.(D + C) + a \sin.(D + C + B) + e \sin.(D + C + B + A) = 0; \text{ also}$$

$$e = - \frac{c \sin. D + b \sin.(D + C) + a \sin.(D + C + B)}{\sin.(D + C + B + A)}$$

$$= - c\psi - \phi,$$

wenn man, der Kürze wegen, setzt

$$\psi = \frac{\sin. D}{\sin.(D + C + B + A)}, \text{ und}$$

$$\phi = \frac{b \sin.(D + C) + a \sin.(D + C + B)}{\sin.(D + C + B + A)}; \text{ folglich}$$

$$2S = (-c\psi - \phi)(a \sin. A + b \sin.(A + B) + c \sin.(A + B + C))$$
$$+ a(b \sin. B + c \sin.(B + C))$$
$$+ b\, c \sin. C.$$

In dieser Gleichung liegt ein doppeltes Gesetz, und eines wie das andere ist gleich leicht zu bemerken, auch schon aus dem, was bisher vorgetragen worden, bekannt.

Ich unterlasse den Gebrauch dieser Formel durch ein Zahlenbeyspiel zu erläutern, weil, nach einem Theile, ihre Bearbeitung nicht schwer, und, nach dem andern, schon (§. 154.) bekannt ist.

An=

Anwendung auf die Theilung geradliniger Figuren.

§. 156.

Aufgabe. Man soll (Fig. 20.) von dem Vielecke ABCDEFG, dessen alle Seiten und Winkel bekannt sind, ein gegebenes Stück S gegen den Scheitel E abschneiden, so daß die Theilungslinie mit einer durch E gelegten MN, welche mit EF einen gewissen Winkel = W macht, parallel laufe.

Auflösung. Man ziehe mit der gegeben Linie MN durch die Eckpunkte der Figur F, D, C u. s. w. die Linien Ff, Dd, Cc u. s. w. parallel; berechne auf die sonst gewöhnliche Weise die Inhalte der so entstandenen Drey- und Vierecke, und bringe dieselben je zwey, je drey u. s. w. in eine Summe, um zu sehen, zwischen welche Parallelen die Theilungslinie zu liegen kommen dürfte. — Es komme die Theilungslinie VX zwischen Dd und Cc zu liegen, so ist das abzuschneidende Stück VDEFX ein Fünfeck, in welchem, weil V = 2 R — (D + E — W), alle Winkel und die Seiten DE, EF bekannt sind. Vergleicht man dieses mit dem, was wir eben (§. vor.) betrachtet haben, und nimmt an, es sey

dort	DE;	CD;	BC;	AB;	AE
hier	VX;	DV;	ED;	FE;	XF, und wieder
dort	D;	E;	A;	B;	C
hier	V;	X;	F;	E;	D, so ist

$$\psi = \frac{\sin. V}{\sin. (V + D + E + F)}, \text{ und}$$

$$\phi = \frac{d \sin. (V + D) + e \sin. (V + D + E)}{\sin. (V + D + E + F)}; \text{ also}$$

$$2S = (-v\psi - \phi)(e \sin. F + d \sin. (F + E) + v \sin. (F + E + D))$$
$$+ e (d \sin. E + v \sin. (E + D))$$
$$+ d v \sin. D.$$

Setzt man ferner noch der mehrern Kürze wegen,

$$\alpha = e \sin. F + d \sin. (F + E)$$
$$\beta = \sin. (F + E + D)$$
$$\gamma = e d \sin. E$$
$$\delta = e \sin. (E + D) + d \sin. D, \text{ so ist}$$

$$2S = (-v\psi - \phi)(\alpha + v\beta) + \gamma + v\delta; \text{ also}$$

$$v = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\psi + \beta\phi - \delta}{2\beta\psi}\right)^2 + \frac{\gamma - \alpha\phi - 2S}{\beta\psi}} - \frac{\alpha\psi + \beta\phi - \delta}{2\beta\psi}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\phi}{2\psi} - \frac{\delta}{2\beta\psi}\right)^2 + \frac{\gamma - \alpha\phi - 2S}{\beta\psi}}$$

$$- \left(\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\phi}{2\psi} - \frac{\delta}{2\beta\psi}\right).$$

Z. B. Es sey $d = 400$; $e = 599$, und $D = 74°\ 5'$; $E = 88°\ 23'$; $F = 67°\ 23'$; $\mathfrak{W} = 30°$; $V = 2R - (D + E - \mathfrak{W}) = 47°\ 32$; $S = 6$ M. $= 240000$ Q. F. und v soll gesuchet werden.

$\sin. D = + \sin. 74°\ 5'$
$\sin. (D + E) = + \sin. 17°\ 32'.$

$\sin. F = + \sin. 67°\ 23'$
$\sin. (F + E) = + \sin. 24°\ 14'$
$\sin. (F + E + D) = + \sin. 49°\ 51'.$

$\sin. V = + \sin. 47°\ 32'$
$\sin. (V + D) = + \sin. 58°\ 23'$
$\sin. (V + D + E) = - \sin. 30°$
$\sin. (V + D + E + F) = - \sin. 82°\ 37'.$

$\psi = - 0,74384$
$\Phi = - 41,474$
$\alpha = + 717,12$
$\beta = - 0,764359$
$\gamma = + 239504,7$
$\delta = + 565,12$

$\frac{\alpha}{2\beta} = - 469,1$; $\frac{\Phi}{2\psi} = + 27,878$; $\frac{\delta}{2\beta\psi} = 496,98$

$\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\Phi}{2\psi} - \frac{\delta}{2\beta\psi} = - 938,202$

 $\alpha\Phi$

$\alpha\phi = -29741,74$; $2S = 480000$; $\beta\psi = +0,5685$

$$\frac{\gamma - \alpha\phi - 2S}{\beta\psi} = -370680,1$$

$(938,202)^2 = 880222,9$

$880222,9 - 370680,1 = 509542,8$

$\sqrt{509542,8} = \pm 713,82$

$v = \pm 713,82 + 938,202 = 224,38.$

§. 157.

Um mehr als ein Stück abzuschneiden, muß man vorerst die Seiten FX, VX vermittelst der beyden Grundgleichungen (§. 32.) berechnen, und dann, die zweyte Theilunglinie zu finden, wieder auf diese Weise verfahren. Und aus dem läßt sich schließen, wie unter gleichen Bedingungen auch drey, vier und mehrere Stücke von gegebener Größe nach der Ordnung abgeschnitten werden mögen. Ich habe für dieses Zahlenbeyspiel, um die Bearbeitung zu erleichtern, nur ein Fünfeck gewählt; für Stücke von mehrern Seiten fällt die Arbeit in eben dem Maaße weitläufiger aus, allein die Verfahrungsart bleibt die nämliche.

§. 158.

Aufgabe. Man soll (Fig. 26.) von dem Vielecke ABCDEFG, dessen alle Seiten und Winkel bekannt sind, ein gegebenes Stück S gegen den Scheitel A abschneiden, so daß die Theilungslinie in die Seite FG in einem bestimmten Punkte L einschneide.

Auf=

Auflösung. Man ziehe aus L nach A, B, C u. s. w. Linien, berechne auf die sonst gewöhnliche leichte Weise die Inhalte der so entstandenen Dreyecke, und bringe deren je zwey, je drey u. s. w. in eine Summe, um zu erfahren, zwischen welche Eckpunkte der Figur das andere Ende der Theilungslinie zu liegen komme. Es komme dasselbe zwischen B und C zu liegen, und LX sey die Theilungslinie, welche gesucht werden soll, so ist das abzuschneidende Stück ein Fünfeck. Vergleicht man dieses mit der (Fig. 31.), und nimmt an, es sey

dort	DE;	EA;	AB;	BC;	CD
hier	XL;	LG;	GA;	AB;	BX, und wieder
dort	A;	B;	C		
hier	G;	A;	B, so ist		

$$2S = l\,(g \sin. G + a \sin. (G + A) + x \sin. (G + A + B))$$
$$+ g\,(a \sin. A + x \sin. (A + B))$$
$$+ a\,x \sin. B; \text{ also}$$

$$x = \frac{2S - l\,(g \sin. G + a \sin. (G + A)) - g\,a \sin. A}{a \sin. B + g \sin. (A + B) + l \sin. (G + A + B)}$$

Z. B. Es sey $l = 250$; $g = 531$; $a = 361$; $G = 58^\circ\, 47'$; $A = 66^\circ\, 37'$; $B = 95^\circ\, 16'$; $S = 5\frac{1}{2}$ M. $= 220000$ Q. F. und x soll gesuchet werden.

$\sin. A = + \sin. 66^\circ\, 37'$

$\sin. G = + \sin. 58^\circ\, 47'$

$\sin. (G + A) = + \sin. 54^\circ\, 36'$

sin.

$\sin. B = + \sin. 84^\circ 44'$

$\sin. (B + A) = + \sin. 18^\circ 7'$

$\sin. (B + A + G) = - \sin. 40^\circ 40'$.

$lg \sin. G = + 113530$

$la \sin. (G + A) = + 73565$

$ga \sin. A = + 175947{,}4$

$a \sin. B = + 359{,}47$

$g \sin. (B + A) = + 165{,}12$

$l \sin. (B + A + G) = - 162{,}91$.

$$x = \frac{440000 - 187095 - 175947{,}4}{359{,}47 + 165{,}12 - 162{,}91}$$

$= 212{,}78$.

§. 159.

Soll unter eben denselben Bedingungen noch ein zweytes Stück abgeschnitten werden, so muß man vorläufig (§. 142.) den Winkel L, und wieder (§. 32.) die Linie XL finden. Und diese Vorbereitungsarbeit muß man so oft wiederholen, als oft ein neues Stück abgeschnitten werden soll.

§. 160.

Aufgabe. Man soll (Fig. 27.) von dem Vielecke ABCDEFG ein gegebenes Stück S abschneiden, so daß die Theilungslinie durch einen innerhalb des Vieleckes gelegenen Punkt L, welchen die Linie AL und der Winkel BAL bestimmen, durchgehe.

Auf=

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die gegebene Linie AL das abzuschneidende Stück begränzen dürfe oder solle, suche man auf die schon mehrmal erwähnte Weise, zwischen welche Eckpunkte der Figur das andere Ende der Theilungslinie fallen werde. Es falle zwischen C und D, und LX sey die Theilungslinie, so ist das abzuschneidende Stück LABCX ein Fünfeck, in welchem alle Seiten und Winkel, die zu findende Seite CX, und die Seite LX, und die ihr anliegenden Winkel, welche aus der Gleichung wegbleiben, ausgenommen, bekannt sind, und CX läßt sich aus eben der Gleichung finden, aus welcher wir (Fig. 26.) BX fanden.

§. 161.

Die vollkommene Aehnlichkeit dieser Aufgabe mit der vorigen gezeigt zu haben, mag hier genug seyn, und darum die Erläuterung durch ein Zahlenbeyspiel allerdings wegbleiben.

Anwendung auf die Verwandlung der gebrochenen Gränzlinien in gerade.

§. 162.

Aufgabe. Es sey (Fig. 32.) ABCDEF eine gebrochene Gränzlinie: man soll dieselbe, dem Inhalte der Figur unbeschadet, in eine gerade verwandeln.

Auflösung. Man suche durch eine vorläufige Zeichnung zu erfahren, in welche nahe oder entfernte Gränzlinie die zu suchende gerade beyläufig einschneide. Sie

schneide

schneide in EF ein, und sey = AΩ, so ist ABCDEΩ ein Sechseck, in welchem alle Seiten und Winkel, die Seiten AΩ, EΩ, und Winkel A, Ω ausgenommen, bekannt sind, und daher (§. 154.)

$$2S = \omega(e\,\sin.E + d\,\sin.(E+D) + c\,\sin.(E+D+C) + b\,\sin.(E+D+C+B))$$
$$+ e(d\,\sin.D + c\,\sin.(D+C) + b\,\sin.(D+C+B))$$
$$+ d(c\,\sin.C + b\,\sin.(C+B))$$
$$+ c\,b\,\sin.B = 0;$$ also

$$\omega = \frac{-e(d\,\sin.D + c\,\sin.(D+C) + b\,\sin.(D+C+B)) - d(c\,\sin.C + b\,\sin.(C+B)) - c\,b\,\sin.B}{e\,\sin.E + d\,\sin.(E+D) + c\,\sin.(E+D+C) + b\,\sin.(E+D+C+B)}.$$

Z. B. Es sey b = 410; c = 251; d = 83; e = 321, und B = 91° 55′; C = 74° 36′; D = 233° 41′; E = 306′ 48′, und ω soll gesuchet werden.

sin. B = + sin. 88° 5′
sin. C = + sin. 74° 36′
sin. (C + B) = + sin. 13° 29′
sin. D = − sin. 53° 41′
sin. (D + C) = − sin. 51° 43′
sin. (D + C + B) = + sin. 40° 12′

sin.

$\sin. E = - \sin. 53^\circ 12'$

$\sin. (E + D) = - \sin. 0^\circ 29'$

$\sin. (E + D + C) = - \sin. 75^\circ 5'$

$\sin. (E + D + C + B) = - \sin. 13^\circ 0'$

$$\omega = \frac{21467,75 + 63244,74 - 84948,68 - 20085 - 79341,52 - 102852,4}{-257,03 - 0,70 - 242,54 - 92,23}$$

$$= \frac{-131108,11}{-592,50} = 221,2.$$

§. 163.

Hat man die Seite ω gefunden, so läßt sich nun auch der Winkel A (§. 147.), und (§. 146.) auch die gerade Linie AΩ auf leichte Weise berechnen, welche beyde Stücke zur Wiederherstellung des Gränzregisters nothwendig sind.

§. 164.

Es ist aber nicht immer der Fall, daß S = 0, oder der Figur ABCDEΩ Theile M und N, welche in Ansehung der Linie AΩ auf entgegengesetzten Seiten liegen, einander vollkommen gleich gesetzt werden dürfen. Wären sie zwar gleich groß, hätten aber nicht gleiche Werthe, so könnte einer für den andern, was doch hier gefordert wird, nicht vollkommen Ersatz seyn. Indem aber diese Theile gleich von Werth seyn müssen, können sie nicht allemal auch gleich von Inhalt seyn. Wir müssen

also

also zeigen, wie auch unter dieser Bedingung eine gebrochene Gränzlinie in eine gerade verwandelt werden möge.

§. 165.

Aufgabe. Es ist der relative Werth der dieß- und jenseits der gebrochenen Gränzlinie gelegenen Grundstücke gegeben: man soll die gebrochene Gränzlinie ABCDEF, dem Werthe des von selber begränzten Grundstückes unbeschadet, in eine gerade verwandeln.

Auflösung. Es verhalte sich der relative Werth des von ABCDEF begränzten Grundstückes zum angränzenden, wie m : n, und m sey größer, als n. Man ziehe aus A und EF die Linie AΩ, so, daß die Theile M und N sich beyläufig wie n : m zu einander verhalten. Es ist dieß darum nöthig, damit man vorläufig wissen möge, welches Stück der gebrochenen Gränzlinie die zu suchende gerade durchschneiden werde. Nach diesen Voraussetzungen wird, $M = x$ angenommen, $N = \frac{m}{n} x$, und, weil hier M positiv, und N negativ genommen werden muß, $S = M - N = \frac{n - m}{n} x$; also

$$\frac{n - m}{n} 2x = \omega \big(e \sin. E + d \sin. (E + D) + c \sin. (E + D + C) + b \sin. (E + D + C + B)\big)$$

$$+ e \big(d \sin. D + c \sin. (D + C) + b \sin. (D + C + B)\big)$$

+ d

$$+ d(c \sin. C + b \sin. (C + B))$$

$$+ c b \sin. B;$$ oder

$$= \omega\lambda + \mu,$$

wenn man die mit ω durch die Multiplication verbundenen Größen $= \lambda$, die damit durch die Addition verbundenen $= \mu$ setzt.

Man setze nun des positiven Theils M Seite BZ $= z$, so ist, vorausgesetzt, daß λ', μ' ähnliche Bedeutungen mit λ, μ haben, $2x = z\lambda' + \mu'$.

Ferner ist des negativen Theils N Inhalt

$$- \frac{m}{n} 2x = (c - z) \left(d \sin. C + e \sin. (C + D) + \omega \sin. (C + D + E)\right)$$
$$d(e \sin. D + \omega \sin. (D + E))$$
$$e\,\omega \sin. E,$$ oder

$$= (c - z)(\alpha + \omega\beta) + \omega\gamma + \delta,$$

wenn man nämlich der Kürze wegen setzt:

$$\alpha = d \sin. C + e \sin. (C + D)$$

$$\beta = \sin. (C + D + E)$$

$$\gamma = d \sin. (D + E) + e \sin. E$$

$$\delta = d e \sin. D.$$

Da nun ist

$$z = \frac{2x - \mu'}{\lambda'}, \text{ und}$$

$$c - z = \frac{-\frac{m}{n}2x - \omega\gamma - \delta}{\alpha + \omega\beta}, \text{ so wird}$$

$$c = \frac{2x - \mu'}{\lambda'} + \frac{-\frac{m}{n}2x - \omega\gamma - \delta}{\alpha + \omega\beta}.$$

Hieraus folgt

$$2x = \frac{(c\lambda' + \mu')(\alpha + \omega\beta) + \lambda'(\delta + \omega\gamma)}{\alpha + \omega\beta - \frac{m}{n}\lambda'},$$

und daher

$$\frac{n-m}{n}(\omega\lambda + \mu) = \frac{(c\lambda' + \mu')(\alpha + \omega\beta) + \lambda'(\delta + \omega\gamma)}{\alpha + \omega\beta - \frac{m}{n}\lambda'}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich endlich

$$\omega^2 + \omega\frac{1}{\beta\lambda}\left(\alpha\lambda + \beta\mu - \frac{m}{n}\lambda\lambda' - \frac{n-m}{n}(c\beta\lambda' + \beta\mu' + \gamma\lambda')\right)$$

$$= \frac{1}{\beta\lambda}\left(\frac{n-m}{n}(c\alpha\lambda' + \delta\mu' + \delta\lambda') - \alpha\mu + \frac{m}{n}\mu\lambda'\right),$$

oder verkürzt

$$\omega^2 + \omega P = Q; \text{ also}$$

$$\omega = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} - \tfrac{1}{2}P.$$

Z. W.

Z. B. Es sey m = 9; n = 8; b = 410; c = 251; d = 83; e = 321; B = 91° 55′; C = 74° 36′; D = 233° 41′; E = 306° 48′, und BC werde von der geraden Gränzlinie AΩ in Z geschnitten. Dieser Voraussetzung gemäß ist ABZ ein Dreyeck, und daher für diesen Fall 2x = zb sin. B; also $\lambda' = b$ sin. B, und $\mu' = 0$. — Nach alle dem findet man:

$$\frac{\alpha\lambda}{\beta\lambda} = + 177,95$$

$$\frac{\beta\mu}{\beta\lambda} = - 221,28$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{\beta\lambda} = - 477,07$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{c\beta\lambda'}{\beta\lambda} = + 21,7$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{\gamma\lambda'}{\beta\lambda} = + 23,0$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{c\alpha\lambda'}{\beta\lambda} = + 3861,23$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{\delta\lambda'}{\beta\lambda} = + 1920,6$$

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\lambda} = - 39375,97$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{\mu\lambda'}{\beta\lambda} = + 105565,4$$

P

$$P = 177,95 - 221,28 + 477,07 - 21,7 - 23,0$$
$$= + 389,04$$
$$Q = 3861,23 + 1920,6 + 39375,97 + 105565,4$$
$$= + 150723,2$$
$$\tfrac{1}{2}P = 194,52;\ \tfrac{1}{4}P^2 = 37838,03$$
$$\tfrac{1}{4}P^2 + Q = 188561,23$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} = 434,23$$
$$\omega = \pm 434,23 - 194,52 = 239,71.$$

§. 166.

Wer den Weg, den ich bey Auflösung dieser Aufgabe gegangen, aufmerksam in Gedanken zurücklegt, der wird die hier gefundene Gleichung auch für den Fall, wo die gebrochene Gränzlinie mehr als einmal von der zu suchenden geraden geschnitten wird, leicht selbst einrichten können. Wie ich hier die zwey, für die Theile M und N gefundenen Ausdrücke auf einen gebracht habe, so mag er es auch mit dreyen, vieren und mehrern versuchen; der Erfolg wird immer seinem Fleiße und seiner Geschicklichkeit entsprechen. Und in so fern ist diese Gleichung ganz allgemein, wenigst so lange, als in dem relativen Werthe der angränzenden Grundstücke keine Veränderung vorgeht.

§. 167.

Für den Fall, wo $m = n$ ist, verwandelt sich obige Gleichung in diese:

$$\omega^2 + \omega \frac{1}{\beta\lambda}(\alpha\lambda + \beta\mu - \lambda\lambda') = \frac{1}{\beta\lambda}(-\alpha\mu + \mu\lambda').$$

Sie

Sie gewähret mit der (§. 162.) gefundenen gleich viel Richtigkeit. Denn setzen wir

z. B. Es sey unter den nämlichen Bedingungen ω zu finden, so ist:

$$P = 177{,}95 - 221{,}95 + 424{,}06 = 380{,}06$$

$$Q = 39375{,}97 + 93835{,}91 = 133211{,}88$$

$$\tfrac{1}{2}P = 190{,}03;\ \tfrac{1}{4}P^2 = 36111{,}4$$

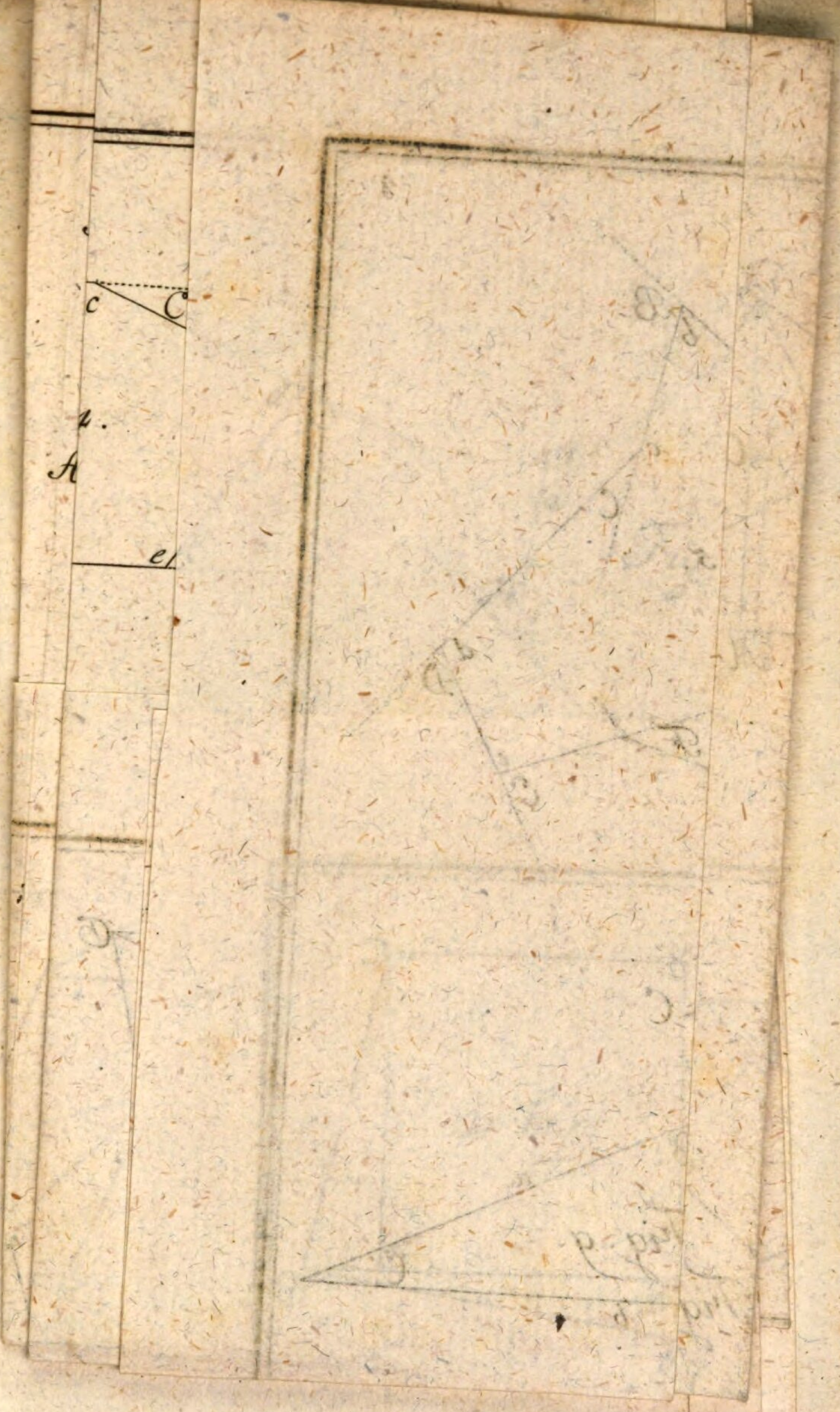
$$\tfrac{1}{4}P^2 + Q = 169323{,}28$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 + Q} = 411{,}95$$

$$\omega = \pm\, 411{,}95 - 190{,}03 = 221{,}92.$$

§. 168.

Daß die allgemeine Gleichung, welche wir (§. 165.) gefunden haben, sich auch zur ökonomischen Feldertheilung gut brauchen lasse, wird der mathematische Leser schon ohne mich bemerkt haben. Demselben sey es überlassen, auch für den Fall, wo nicht der Punkt, durch den die Theilungslinien gehen, sondern der Winkel, unter welchem sie die Gränzlinie der wechselnden Güte zweyer Grundstücke schneiden soll, gegeben sind, eine Gleichung zu finden. — Er wird sich wenigst überzeugen, daß die Polygonometrie da noch immer gute Dienste leisten könnte, wo die Trigonometrie nicht mehr hinreichet.



b: D

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

4 Zrb
2 Kpf

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Däzel, G. A.,

Anfangsgründe der Goniometrie, oder analytischen Trigonometrie und Polygonometrie mit Anwendungen auf die Land- und Feldmeßkunst

München 1800

Oecon. 450#Beibd.1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10620478-8
VD18 15356752